Глава 9.

**Колебания с несколькими степенями свободы.**

**Краткие сведения из теории.**

*Системами с п степенями* *свободы* принято в динамике называть такие системы, для полной фиксации геометрического состояния которых в любой момент времени требуется задать *п* параметров, например положение (прогибы) *п* точек. Положение прочих точек определяется обычными статическими приемами.

Примером системы с *п* степенями свободы может служить балка или плоская рама, если массы ее отдельных частей или элементов условно (для облегчения динамического расчета) считаются сосредоточенными в *п* точках, или если она несет п больших масс (двигатели, моторы), по сравнению с которыми возможно пренебречь собственным весом элементов. Если отдельные сосредоточенные («точечные») массы могут при колебаниях совершать перемещения по двум направлениям, то число степеней свободы системы будет равно числу связей, которые следует наложить на систему, чтобы ликвидировать смещения всех масс.

Если вывести из равновесия систему с п степенями свободы, то она будет совершать **свободные колебания**, причем каждая «точка» (масса) будет совершать сложные полигармонические колебания типа:



(9.1)

Постоянные А*i* и В*i*  зависят от начальных условий движения (отклонений масс от статического уровня и скоростей в момент времени *t*=0). Лишь в некоторых, особых, случаях возбуждения колебаний полигармоническое движение для отдельных масс может перейти в гармоническое, т.е. как в системе с одной степенью свободы:



*Число собственных частот системы равно числу ее степеней свободы.*

Для вычисления собственных частот необходимо решить так называемый определитель частот, записываемый в таком виде:



Это условие в развернутом виде дает уравнение *п*-ой степени для определения *п* значений ω2, которое называется уравнением частот.

Через δ11, δ12, δ22 и т.д. обозначены возможные перемещения. Так, δ12 есть перемещение по первому направлению точки расположения первой массы от единичной силы, приложенной по второму направлению к точке расположения второй массы и т.д.

При двух степенях свободы уравнение частот получает вид:



Откуда для двух частот имеем:



В том случае, когда отдельные массы М*i* могут совершать в совокупности с линейными перемещениями также вращательные или только вращательные движения, то *i*-той координатой будет угол вращения, и в определителе частот массу

М*i* надлежит заменить моментом инерции массы J*i* ; соответственно возможные перемещения по направлению *i*-той координаты (*δi2*, *δi2* и т.д.) будут являтся угловыми перемещениями.

Если какая-либо масса будет совершать колебания по нескольким направлениям - *i*-му и *k*-му (например, по вертикальному и горизонтальному), то такая масса участвует в определителе несколько раз под номерами М*i* и М*k* и ей соответствует несколько возможных перемещений (*δii*, *δkk* , *δik*, и т.д.).

Заметим, что каждой собственной частоте присуща своя особая форма колебаний(характер изогнутой оси, линии прогибов, перемещений и т.п.), которая отдельных, особых, случаях может оказаться действительной формой колебаний, если только надлежащим образом или возбуждены свободные колебания (надлежащий подбор импульсов, точек их приложения и т.п.). В этом случае колебания системы будут совершаться по законам движения системы с одной степенью свободы.

В общем случае, как это вытекает из выражения (9.1), система совершает полигармонические колебания, но, очевидно, что всякая сложная упругая линия, в которой отражается влияние всех собственных частот, может быть разложена на отдельные составляющие формы, каждая из которых соответствует своей собственной частоте. Процесс такого разложения истинной формы колебаний на составляющие (что необходимо при решении сложных задач строительной динами) носит название разложения по формам собственных колебаний.

Если в каждой массе, точнее – по направлению каждой степени свободы, приложить возмущающую силу, изменяющуюся по времени по гармоническому закону или , что для дальнейшего безразлично, причем амплитуды сил при каждой масс различны, а частота и фаз одинаковы, то при продолжительном действии таких возмущающих сил система будет совершать установившееся вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы.

 Амплитуды перемещений по направлению любой *i*-той степени в этом случае будет:

(9.4)

где определитель D записывается по (9.2) с заменой ω на θ и, следовательно, D≠0; D*i* определяется выражением:



 т.е. *i*-й столбец определителя D заменяется столбцо, составленным из членом вида:  Для случая двух степеней свободы:

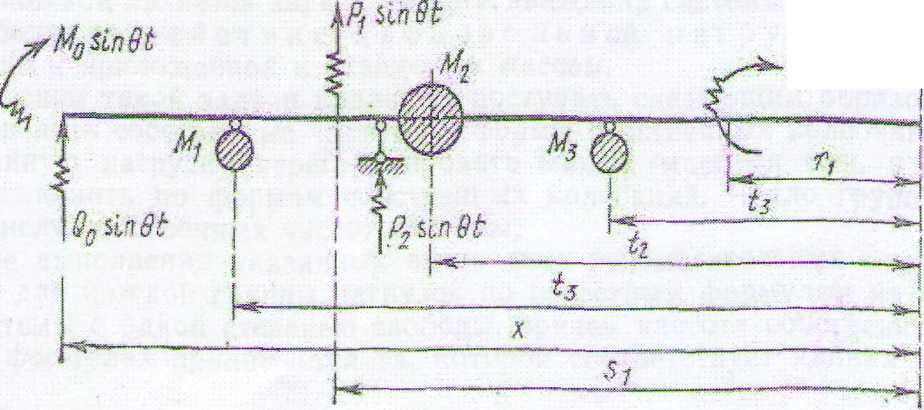


  (9.6)

И соответственно  

При расчете на вынужденные колебания балок постоянного сечения, несущих сосредоточенные массы (рис.9.1).

Рис. 9.1



Проще, однако, пользоваться нижеуказанными формулами для амплитуд прогиба, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы в любом сечении балки:

 (9.7)

где *y0, φ0, M0, Q0* – амплитуды прогиба, поворота, момента и поперечной силы начального сечения (начальные параметры); *Mi* и *Ji*  - масса и ее момент инерции (сосредоточенные массы); знак ∑ распространяется на все силы и сосредоточенные массы, расположенные от начального сечения до обследуемого.

Указанными формулами (9.7) можно пользоваться и при вычислении собственных частот, для чего необходимо считать возмущающие силы ∑ *Рi* и моменты ∑ *Мi* равными нулю, заменить частоту вынужденных колебаний θ частотой собственных колебаний ω и, предполагая существование колебаний (свободных колебаний), написать выражения (9.7) применительно к сечениям, где расположены сосредоточенные массы и уже известны амплитуды (опорные сечения, ось симметрии и т.д.). Получим систему однородных линейных уравнений. Приравнивая к нулю определитель этой системы, получим возможность вычислить собственные частоты.

Целесообразным, оказывается использовать выражения (9.4) и (9.5) для определения амплитуд (*y0, φ0,*и т.п.) при *х*=0, а затем с помощью (9.7) вычислить все остальные элементы прогиба.

Более сложной является задача расчета движений системы с несколькими степенями свободы на действие произвольной нагрузки, изменяющейся во времени и приложенной к различным массам.

При решении такой задачи надлежит поступать следующим образом:

а) определить собственные частоты и формы собственных колебаний;

б) заданную нагрузку перегруппировать между массами или, как принято говорить, разложить по формам собственных колебаний. Число групп нагрузок равняется числу собственных частот системы;

в) после выполнения указанных выше двух вспомогательных операций сделать расчет для каждой группы нагрузок по известным формулам из теории колебаний системы с одной степенью свободы, причем частота собственных колебаний в этих формулах принимается та, которой соответствует данная группа нагрузки;

г) частные решения от каждой категории нагрузок суммируют, чем и определяется окончательное решение задачи.

Определение собственных частот выполняется согласно (9.2). Что касается выявления форм собственных колебаний, то здесь необходимо руководствоваться тем основным свойством любой формы собственных колебаний, что она представляет собой линию влияния прогиба от сил (число которых равно числу степеней свободы), пропорциональных произведению масс на ординаты прогибов точек прикрепления масс. При равных массах форма собственных колебаний представляет линию прогиба от сил, пропорциональных ординатам прогиба; эпюра нагрузки подобна эпюре прогиба.

Низшей частоте соответствует наиболее простая форма колебаний. Для балок чаще всего эта форма близко отвечает изогнутой оси системы под влиянием собственного веса. Если данная конструкция оказывается менее жесткой в каком-либо направлении, например в горизонтальном, то для выявления характера искомой изогнутой оси надлежит условно собственный вес приложить в этом направлении.

Что касается второй формы собственных колебаний, то необходимо удовлетворить условие ортогональности, а именно:

 (9.8)

где *y1i* – ординаты точек, в которых расположены массы  *Mi* , соответствующие первой форме, а *y2i*  - соответствующие второй.

Для определения следующих высших форм ординаты должны аналогично удовлетворять условию ортогональности по отношению ко всем предыдущим формам собственных колебаний.

Разложение заданной внешней нагрузки по формам собственных колебаний следует понимать так, что заданная нагрузка представляется состоящей из нескольких групп, подобранных с таким расчетом, что от действия каждой группы статическая изогнутая ось системы будет по своей форме соответствовать ранее найденной одной из форм собственных колебаний.

Эффективным методом определения частот свободных колебаний является графоаналитический метод, разработанный А.Ф. Смирновым. Этот метод, использующий теорию матриц, является одним из наиболее мощных инструментов для решения задач динамики с использованием ЭВМ.

Уравнение частот записывается в следующем виде:



(9.9)

Причем после нахождения характеристических чисел λ частоты собственных колебаний определяется выражением 

В определителе (9.9) Е- единичная диагональная матрица, матрица С определяется матричным произведение:

 (9.10)

где *Lm* – матрица влияния моментов в заданной системе, т.е. матрица, каждый столбец которой определяет значения моментов во всех точках приложения масс от действия единичной силы в соответствующей точке балке;  - матрица влияния моментов в фиктивной балке. В случае балки с шарнирно опертыми краями фиктивная балка совпадает с заданной; В – матрица упругих грузов, определяемая выражением (3.8); М\* - диагональная матрица, определяемая значениями масс, приложенных в разных точках, причем:

где *m0* – некоторая произвольная масса.

Отыскание характеристических чисел определителя может быть произведено методом итераций или любым иным эффективным методом.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что определение частот колебаний можно провести, не прибегая даже к понятию определителя. В данном случае достаточно рассмотреть матрицу С-λЕ и вычислить ее собственные числа и соответствующие им собственные векторы любым прямым методом: методом Якоби, методом понижения или методом исчерпания в сочетании с методом итераций.