ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поняття поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду

ах2+by2+cz2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0, (1)

де принаймні один з коефіцієнтів а, b, c, d, e, f відмінний від нуля.

Рівняння(1) називається загальним рівнянням поверхні другого порядку.

Поверхня другого порядку як геометричний об’єкт не змінюється, якщо він заданої прямокутної системи координат перейти до іншої. При цьому рівняння і рівняння, знайдене після перетворення координат, будуть еквівалентні.

Можна довести, що існує система координат, в якій рівняння має найпростіший (або канонічний вигляд.

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, одно порожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо ці поверхні та їхні канонічні рівняння.

Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називають поверхню σ, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну) і паралельні заданій прямій l. Вивчатимемо лише такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, яка перпендикулярна до цієї площини.

Розглянемо випадок, коли твірні циліндричної поверхні паралельні осі Оz, а напрямна лежить в площині Оху.

Нехай задано рівняння

f (x; y) =0, (2)

яке в площина Оху визначає деяку лінію L – множину точок М (х; у), координати яких задовольняють це рівняння. Дане рівняння задовольняють також координати всіх тих точок N(х; у; z) простору, у яких дві перші координати х і у збігаються з координатами будь-якої точки ліні L, а третя координата z – довільна, тобто тих точок простору, які проектуються на площину Оху в точки лінії L.

Всі такі точки лежать на прямій, яка паралельна осі Oz і перетинає лінію L в точці М (х; у). Сукупність таких прямих і є циліндричною поверхнею σ.

Якщо точка не лежить на поверхні σ, то вона не може проектуватися в точку лінії L, тобто координати такої точки рівняння (2) не задовольняють. Отже, рівняння (2) визначає поверхню σ. Таким чином, рівняння f (x; y) =0 визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Оz, а напрямна L в площині Оху задається тим самим рівняння f (x; y) =0. Ця сама лінія в просторі Охzу задається двома рівняннями:



Аналогічно рівняння f (x; y) =0, в якому відсутня зміна у, визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Оу, а напрямна L в площині Охz задається тим самим рівнянням f (x; y) =0; рівняння f (у; z) =0 визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Ох.

Поверхня обертання

Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої l, називають поверхнею обертання.

Нехай лінія l, що лежить в площині Оуz, задана рівняннями



(Х,Y, Z – змінні координати точок лінії l, а х, у, z)= змінні координати точок поверхні).

Розглянемо поверхню, утворену обертанням цієї лінії навколо осі Оz і знайдемо рівняння поверхні обертання.

Проведено через довільну точку М (х, у, z) поверхні обертання площину, перпендикулярну до осі Оz, і позначимо через К і N точки перетину цієї площини з віссю Оz і лінією l. Оскільки відрізки , КN KM рівні між собою як радіуси, КР = у, РМ = х, то Y=+, крім того Z=z. Оскільки координати точки N задовольняють рівняння F(X, Z) = 0, то, підставляючи в це рівняння замість Y, Z рівні їм величини +, z, дістанемо рівняння

F=+,z) = 0,

яке задовольняє довільна точка М (х; у; z) поверхні обертання. Можна показати, що короординати точок, які н лежать на цій поверхні, рівняння не задовольняють. Отже, рівняння є рівнянням поверхні обертання.

Аналогічно можна скласти рівняння поверхонь обертання навколо осей Ох і Оу. Таким чином, щоб дістати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба в рівнянні кривої залишити без зміни координату, яка відповідає осі обертання, а другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат, взятий із знаком + або -.

Конічні поверхні

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих, що проходять через задану точку Р і перетинають задану лінію L. При цьому лінія L називається напрямною конічної поверхні, точка Р – її вершиною, а кожна з прямих, які утворюють конічну поверхню, - твірною.

Нехай напрямна L задана в прямокутній системі координат рівняннями

(1)

а точка Р (х0; у0;z0) – вершина конічної поверхні. Щоб скласти рівняння конічної поверхні, візьмемо на поверхні довільну точку М (х; у; z) і позначимо точку перетину твірної РМ з напрямною L через N(Х,Y, Z).

Канонічні рівняння твірних, які проходять через точку N і Р, мають вигляд

= = (2)

Виключаючи Х,Y, Z з рівнянь дістанемо шукане рівняння конічної поверхні.