## Операторы момента импульса и их коммутация

Вместе с модулем момента импульса , или эквивалентно , квантуется и направление этой векторной величины, но в довольно своеобразной форме, отличной от классического представления о направлении векторов. Исследуем это квантование по направлению.



4.3.5.1. Как следует из раздела 4.3.4.4, наряду с , функции отвечает совершенно определенное значение , но две другие проекции и остаются неопределенными. Это не случайно, а обусловлено принципом неопределенности Гейзенберга. Легко убедиться в этом, показав, что не коммутирует с и , но в то же время коммутирует с. Аналогично между собой не коммутирует любая пара из .



В качестве примера найдем коммутатор



(4.65)



Аналогично можно получить следующие соотношения

(4.66)



4.3.5.2. Эти формулы полезны для отыскания возможных значений квадрата момента импульса и волновых функций при решении уравнения (4.62), которое несомненно сложнее решения (4.63). Для разрешения этой задачи воспользуемся приёмом, ранее примененным нами для гармонического осциллятора (см. раздел 3.51) когда собственные значения и собственные функции оператора Гамильтона были найдены лишь на основе коммутационных соотношений, а также операторов сдвигов состояний.



4.3.5.3. Сконструировав специально операторы сдвига состояний, можно решить и задачу о вращательных состояниях жесткого ротатора. В этом случае мы будем перемещаться от состояния к состоянию с одним и тем же значением , а, следовательно, и с одной и той же кинетической вращательной энергией, т.е. внутри вырожденного уровня попытаемся "пересчитать" дискретные состояния. Они отличаются только значениями , т.е. ориентациями вектора момента импульса. Главная проблема на данном этапе – отыскание квантового числа l, квантующего модуль вектора



4.3.5.4. Для этой цели запишем, как обычно

(4.67)



и одновременно учтём, что справедливы операторные уравнения

(4.68)



(4.69)



Вместе с тем, как и в теории плоского ротатора

(4.70)



Вычтем почленно (4.70) из (4.68) и получим

,(4.71)



а с учётом (4.67)

(4.72)



Таким образом, функция Y оказывается собственной функцией оператора, т.е.



(4.75)



где – собственное значение.



В силу самосопряженности операторов квантовой механики, их собственные значения должны быть вещественными и единая физическая величина как сумма квадратов может быть только положительной. Это справедливо, несмотря на недоступность для индивидуального определения каждого из слагаемых и



Из сопоставления (4.72) и (4.73) следует неравенство

(4.74)



Отсюда . (4.75)



4.3.5.5. Формула (4.75) содержит прозрачный смысл: квадрат момента импульса не может быть меньше квадрата одной из его проекций. Одно и то же значение модуля момента импульса, определяемое квантовым числом l, может отвечать состояниям с различными значениями проекции , которые задаются квантовым числом m. При этом каждому состоянию с положительным значением m соответствует состояние с отрицательным m, отличающееся направлением вращения вокруг оси z. Формула (4.75) одновременно определяет пределы изменения квантового числа m, увязывая его с числом l в виде



, (4.76)



т.е. и (4.77)



4.3.5.6. Наконец, мы подошли вплотную к решению важнейшей проблемы – связи квантового числа l со значением квадрата момента импульса и с параметром в уравнении (4.62). Обратимся вновь к уравнению (4.72). В его правой части стоит сумма квадратов операторов. Исследуем её, разлагая на комплексные сомножители по аналогии с задачей о гармоническом осцилляторе. Обозначим их и . Их смысл подобен смыслу операторов (3.79) и (3.80) – они также являются операторами сдвига состояний.



(4.78)



(4.79)



4.3.5.7. Если в задаче об осцилляторе каждый из операторов сдвигов исследовался в паре с гамильтонианом, то в данном случае сдвиги не будут связаны с перемещением по энергетической лесенке уровней. Здесь мы будем двигаться как бы по энергетической горизонтали в пределах одного вырожденного уровня, пересчитывая состояния с общим модулем |, но с разными его ориентациями. По этой причине удобнее всего рассмотреть последствия перестановок операторов и , с оператором , действие которого на конкретную собственную волновую функцию описывается уравнением (4.69). Составим коммутаторы и . Для удобства и сокращения громоздких выкладок объединим символы (+) и (–). Далее всюду будем полагать, что запись индексов в виде столбца (±) означает, что в последующих выражениях верхнему индексу (+) будут соответствовать верхние же знаки в совместных записях и, наоборот, нижнему индексу (–) – знаки внизу, например:



(4.80)



Подставим в (4.80) уравнения (4.78) и (4.79), затем перегруппируем слагаемые



(4.81)



Коммутаторы и уже выведены выше – формула (4.66). Используем их выражения



т.е. (4.82)



(4.83)



4.3.5.8. Исходя из формулы (4.80), произведение операторов можно записать так



При подстановке (4.82) и (4.83) это дает

(4.84)



Найдем далее результат действия операторов на волновую функцию, для которой заданы квантовые числа l и m, т.е. , используя уравнения (4.64) и (4.69):



(4.85)



4.3.5.9. Выражение (4.85) – это по-прежнему операторное уравнение на собственные значения. Оно показывает, что функции соответствует состояние с квантовым числом m+1, т. е увеличенным на единицу по сравнению с исходной функцией - состояние . Таким образом, оператор с полным правом может быть назван оператором повышения состояния (но не уровня!). Аналогично оператор – оператор понижения, так как функции соответствует уменьшенное квантовое число –



4.3.5.10. Следовательно, действие операторов повышения и понижения на волновую функцию можно представить так



(4.86)



(4.87)



Обратите внимание на то, что операторы и изменяют характеристику преобразуемой функции, и формулы (4.86) и (4.87) не создают уравнений на собственные значения, а постоянные – это просто численные множители. Таким образом, эти формулы позволяют “пересчитывать” состояния в проделах одного вырожденного уровня, которому отвечает конкретный модуль момента импульса, заданный квантовым числом l. При этом сдвиг между ближайшими значениями проекций равен , т.е.



. (4.88)



4.3.5.11. Напоминаем, что волновые функции являются собственными функция-ми операторов и . На основании уравнений (4.64) и (4.68) можно записать



(4.89)



а из уравнений (4.58) и (4.70) следует

(4.90)



При вычитании (4.90) из (4.89) получаем операторное уравнение (4.71) с конкретным собственным значением т.е.



. (4.91)



Целесообразно построить такую последовательность сомножителей из операторов сдвига, которая непосредственно приводила бы к ожидаемому результату (4.91).

4.3.5.12. Для этого исследуем произведение операторов вида



.



Подставляя коммутатор (4.66), получим

(4.92)



Совершенно аналогично

(4.93)



или при совместной записи

(4.94)



В этих формулах привлекательно то, что результат произведения двух операторов сдвигов выражается через операторы с действительными собственными значениями, как это следует из сопоставления правых частей уравнений (4.92) – (4.94), с одной стороны, и уравнений (4.90) и (4.91) – с другой.

4.3.5.13. Все коммутационные соотношения операторов момента импульса и его проекций, найденные в этом разделе, удобно свести в одну таблицу 4.З. . В строках таблицы указаны левые операторы-сомножители, а в столбцах – правые. На пересечении строки и столбца находится коммутатор соответствующих операторов. Обращаем внимание читателя на антисимметричный характер таблицы коммутаторов относительно главной диагонали, т.е. элементы, одинаково расположенные по разные стороны последней отличаются только знаками. Таким образом, при изменении порядка записи операторов–сомножителей коммутатор меняет знак.

Таблица 4.3. Коммутаторы операторов момента импульса



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1\ 2 |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  | 0 |  | 0 |  |  |  |
|  | 0 |  |  | 0 |  |  |
|  | 0 |  |  |  | 0 |  |
|  | 0 |  |  |  |  | 0 |