Академия России

Кафедра Физики

**Лекция**

**Операторные передаточные функции и их свойства**

#### **Орел 2009**

**Учебные и воспитательные цели:**

Разъяснить слушателям сущность операторных передаточных функций, устойчивых и неустойчивых электрических цепей, критерий устойчивости Гурвица, а также связь ОПФ с комплексной передаточной функцией.

## Распределение времени лекции

Вступление………………………………………………………….5 мин.

Учебные вопросы:

1. Определение операторных реакций в сложных цепях………..15 мин.

2. Операторная передаточная функция……………………………20 мин.

3. Устойчивые и неустойчивые электрические цепи.

Критерий устойчивости Гурвица, полиномы Гурвица………….35 мин.

4. Связь между ОПФ и КПФ……………………………………….10 мин.

Заключение…………………………………………………………5 мин.

**1. Определение операторных реакций в сложных цепях**

В общем случае -изображение искомого колебания находится путем составления и решения системы уравнений в операторной форме в 3 этапа. Они могут быть составлены непосредственно по схеме цепи с использованием ранее изученных методов расчета, среди которых наибольшее распространение получили МУН и МКТ. В случае ненулевых начальных условий реактивные элементы должны быть отображены схемами замещения.

1 этап: система уравнений составленная по МУН для цепи имеющей *N* потенциальных узлов будет иметь вид:

.

Здесь  – сть сумма операторных проводимостей, подключенных к данному узлу, а  – проводимость, связывающая этот узел с соседним "*i*"-м узлом.

В правые части входят -изображения задающих токов, подключенных к "*k*"-му узлу.

Решая задачу по МКТ, следует, прежде всего, выбрать совокупность независимых контуров и, руководствуясь ранее полученным правилом, составить систему контурных уравнений.

В этой системе  будет представлять собой сумму сопротивлений входящих в "*k*"-й контур, а  есть сумма сопротивлений, которые одновременно входят в "*k*"-й и "*i*"-й контуры.

Знаки слагаемых этой суммы определяются установленными ранее правилами. В правые части уравнений входят операторные источники ЭДС.

Второй этап: нахождение ‑изображения реакции (операторного напряжения или операторного тока).

Если цепь содержит только один воздействующий источник (обозначим его ), то искомую реакцию  можно найти по формуле:

,

где  – минор определителя , относительно *i*‑й строки и *k*‑го столбца.

Важно отметить, что определитель  и любые его миноры представляют собой рациональные функции (иначе, алгебраические дроби) оператора , все коэффициенты которых являются вещественными числами.

Третий этап: применение обратного преобразования Лапласа, в результате чего находится . Такие действия производятся на основе формулы обращения Римана-Меллина и являются достаточно сложными. Однако в частных случаях, имеющих большое прикладное значение, те же результаты могут быть получены более элементарным путем, а именно:

– использование таблиц соответствия;

– разложение  на простые дроби или в ряд с последующим использованием таблиц соответствия.

**2. Операторная передаточная функция**

**Отношение -изображения реакции к -изображению воздействия при нулевых начальных условиях называется операторной передаточной функцией (ОПФ). Обозначается .**

В общем случае  может быть безразмерной величиной или иметь размерность сопротивления или проводимости. Число ОПФ для конкретной цепи равно числу реакций.

Пусть в цепи действует один источник , а реакцией  является одно из узловых напряжений или один из контурных токов.

Тогда:

.

Можно показать, что после раскрытия определителя  и его минора , ОПФ будет иметь вид:



где  и  – вещественные числа, т. е. ОПФ электрической цепи представляет собой рациональную функцию с вещественными коэффициентами, причем степень числителя не может превышать степень знаменателя.

ОПФ не зависит от воздействия, а определяется только элементами схемы и порядком их соединения. Если известна ОПФ, то реакция находится как:

.

Пример: определить одну из ОПФ для последовательного контура, показанного на рис. 1.



### Рис. 1

В данной схеме будет четыре ОПФ.

Найдем .



; ; .

Аналогичным образом находятся , , .

3. Устойчивые и неустойчивые электрические цепи. Критерий устойчивости Гурвица, полиномы Гурвица

Линейную электрическую цепь принято определять как устойчивую, если в ней не возникают неограниченно возрастающие свободные колебания. В противном случае ее определяют как неустойчивую. Такая трактовка следует из классических работ по теории устойчивости, выполненных русским математиком А. М. Ляпуновым (1857— 1918 гг.).

Большинство современных ЛРТУ являются активными, т. е. в схемах замещения содержат зависимые источники. Любая пассивная электрическая цепь является устойчивой. Если же она активна, то вопрос об ее устойчивости остается открытым: активная цепь может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

При рассмотрении предыдущего вопроса было показано, что реакция находится из соотношения:

.

Пусть  представляет собой -функцию, -изображение которой равно единице.

Тогда:

,

где  и  рациональные функции с вещественными коэффициентами.

Для нахождения оригинала такая функция может быть единственным образом разложена на сумму простых дробей вида:

.

Здесь  являются корнями полинома .

Посредством указанного разложения по таблице соответствий находится выражение для .

При этом .

Заметим, что среди корней полинома  могут быть как вещественные так и комплексные сопряженные. В случае вещественных корней функция  будет убывающей, если .

Если же  то слагаемые можно записать как:

.

Полученная функция является гармонической с амплитудной .

Последняя будет убывающей при .

Следовательно, система устойчива, если действительные (вещественные) части корней знаменателя характеристического уравнения  отрицательны. (Фундаментальное положение, вытекающее из общей теории устойчивости А. М. Ляпунова, обоснованной в 90‑х годах прошлого века).

Для наглядного суждения о характере и значениях корней удобно изображать их точками на комплексной плоскости. Так, например, на рисунке 2 показано расположение на комплексной плоскости корней некоторого полинома знаменателя пятой степени.





















Рис. 2

Здесь корнями являются:  вещественен и отрицателен, ;  комплексны, сопряжены попарно и имеют отрицательные вещественные части. Очевидно, что в данном случае цепь будет устойчивой.

Наличие у характеристического уравнения корней с положительными вещественными частями приводит к тому, что любое случайное воздействие, каким бы оно не было малым, вызывает нарастающие по амплитуде свободные колебания. Значения амплитуды колебаний ограничиваются нелинейными свойствами усилительных приборов. Внешне рассматриваемая цепь без каких-либо видимых воздействий "сама" переходит в режим установившихся колебаний или, как говорят, "самовозбуждается".

*Электрические цепи, у которых свободные колебания, пока они малы, возрастают по времени, причем предел их возрастания определяется нелинейными свойствами элементов цепи, называют неустойчивыми*.

Характеристическое уравнение знаменателя ОПФ любой неустойчивой цепи должно иметь корни, расположенные в правой части комплексной плоскости. Одной из важнейших задач, возникающих при проектировании самых разнообразных цепей с зависимыми источниками, является задача исследования проектируемой цепи на устойчивость.

**Критерий устойчивости Гурвица, полиномы Гурвица**

Во всех задачах исследования цепи на устойчивость необходимо решить, имеет ли характеристическое уравнение знаменателя ОПФ проектируемой цепи корни, расположенные в правой полуплоскости.

Методы, с помощью которых можно судить об устойчивости цепи, не прибегая к вычислению корней характеристического уравнения знаменателя, называют критериями устойчивости.

В настоящее время известен ряд критериев устойчивости, среди которых чаще всего используются критерии устойчивости, предложенные А. Гурвицем (1895), А. В. Михайловым (1938) и Г. Найквистом (1932). Не все они одинаково удобны и универсальны, в каждом частном случае один из них может оказаться предпочтительным.

Один из первых критериев устойчивости был найден немецким математиком А. Гурвицем и опубликован им в 1895 году. Он определил условия, которым должны удовлетворять специально составленные соотношения между коэффициентами алгебраического уравнения с тем, чтобы все корни последнего имели отрицательные вещественные части или, иными словами, были расположены в левой полуплоскости.

Формулировка критерия устойчивости Гурвица: (в алгебре критерий Рауса-Гурвица) цепь будет устойчивой, если определитель:

,

составленный из коэффициентов полинома знаменателя ОПФ:

****

и все его главные миноры ; ;  принимают положительные значения.

Этот критерий приводится без доказательства. Определитель принято называть определителем Гурвица. Он составляется по следующему простому правилу. На главной его диагонали выписываются коэффициенты в том порядке, в котором они расположены в уравнении, начиная с коэффициента . В каждом из столбцов под диагональным элементом выписываются коэффициенты с убывающими, а над ним – с возрастающими индексами. Все коэффициенты, индексы которых превышают  или отрицательны, заменяются нулями. При этом следует учесть, что .

Пример. Пусть дан полином четвертой степени:

****.

Ему соответствует определитель Гурвица:

.

Главные миноры этого определителя:

; ; ; .

Определитель и все его миноры положительны. Следовательно, все корни рассматриваемого уравнения  лежат в левой полуплоскости. Действительно, легко убедиться подстановкой, что значения корней уравнения таковы:

; ; .

Полиномы с вещественными коэффициентами, нули которых расположены в левой полуплоскости, принято в ТЭЦ называть полиномами Гурвица или устойчивыми полиномами. В дальнейшем их будем обозначать (*p*). Можно показать, что положительность коэффициентов полинома и неравенство их нулю есть необходимое, но недостаточное условие принадлежности его к классу полиномов Гурвица.

Так полиномы  и  не могут быть (*p*) поскольку в первом есть отрицательный коэффициент (‑1), а во втором коэффициент при  равен нулю.

В дальнейшем ОПФ пассивных цепей будем записывать в виде:

.

**4. Связь между ОПФ и КПФ**

КПФ образуется из ОПФ путем замены оператора  на оператор , т.е. .

.

Если степень, в которую возводится оператор  четная, то: , если же она нечетная, то .

Отсюда следует вывод, что вещественные части полиномов представляют собой четные функции частоты, а мнимые – нечетные, т. е. можно в общем виде записать:

****,

где  – четные полиномы частоты .

Возьмем модуль и аргумент и в  результате получим:

.

Откуда:

АЧХ: ;

ФЧХ: ****.

По этим выражениям можно построить графики.

**Литература**

1. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1986. (Учебник);
2. Бакалов В. П. и др. Теория электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1998.
3. Качанов Н. С. и др. Линейные радиотехнические устройства. М.: Воен. издат., 1974. (Учебник);
4. Попов В. П. Основы теории цепей – М.: Высшая школа, 2000.(Учебник)