**РЕФЕРАТ**

**«Математическая постановка краевых задач уравнения теплопроводности»**

**Краевые условия**

Дифференциальное уравнение теплопроводности является математической моделью целого класса явлений теплопроводности и само по себе ничего не говорит о развитии процесса теплопереноса в рассматриваемом теле. При интегрировании дифференциального уравнения в частных производных получаем бесчисленное множество различных решений. Чтобы получить из этого множества одно частное решение, соответствующее определенной конкретной задаче, необходимо иметь дополнительные данные, не содержащиеся в исходном дифференциальном уравнении теплопроводности. Этими дополнительными условиями, которые в совокупности с дифференциальным уравнением (или его решением) однозначно определяют конкретную задачу теплопроводности, являются распределение температуры внутри тела (начальные или временные условия), геометрическая форма тела и закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела (граничные условия).

Для тела определенной геометрической формы с определенными (известными) физическими свойствами совокупность граничных и начальных условий называется краевыми условиями. Итак, начальное условие является временным краевым условием, а граничные условия – пространственным краевым условием. Дифференциальное уравнение теплопроводности вместе с краевыми условиями составляет краевую задачу уравнения теплопроводности (или короче – тепловую задачу).

Начальное условие определяется заданием закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени, т. е.

*Т (х, у, z,* 0) = *f* *(х, у, z),* (3.1)

где *f (х, у, z)* — известная функция.

Во многих задачах принимают равномерное распределение температуры в начальный момент времени; тогда

*Т (х, у, z,* 0) = *Т*о = const. (3.2)

Граничное условие может быть задано различными способами.

1. *Граничное условие первого рода состоит в задании распределения температуры по поверхности тела в любой момент времени,*

*Т*s (τ) = *f*(τ) (3.3)

где *Т*s (τ) – температура на поверхности тела.

*Изотермическое граничное условие* представляет частный случай условия 1-го рода. При изотермической границе температуру поверхности тела принимают постоянной *T*s= const, как, например, при интенсивном омывании поверхности жидкостью с определенной температурой.

2. *Граничное условие второго рода состоит в задании плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела как функции времени,* т. е.

*q*s *(τ)* = *f*(τ). (3.4)

Условие 2-го рода задает величину теплового потока на границе, т.е. кривая температуры может иметь любую ординату, но обязательно заданный градиент. Простейший случай граничного условия второго рода состоит в постоянстве плотности теплового потока:

*q*s *(τ) = qc* = const.

*Адиабатическая граница* представляет частный случай условия 2-го рода. При адиабатическом условии тепловой поток через границы равен нулю. Если теплообмен тела с окружающей средой незначителен в сравнении с тепловыми потоками внутри тела, поверхность тела можно считать практически непропускающей тепла. Очевидно, что в любой точке адиабатической границы *s* удельный тепловой поток и пропорциональный ему градиент по нормали к поверхности равны нулю.

3. *Обычно граничное условие третьего рода характеризует закон конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой при постоянном потоке тепла (стационарное температурное поле).* В этом случае количество тепла, передаваемого в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду с температурой *Тс* в процессе охлаждения *(Тs* > *Тс),* прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, т. е.

*qs = α* (*Тs* - *Тс*), (3.5)

где α— коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплообмена *(вm/м2·град).*

Коэффициент теплообмена численно равен количеству тепла, отдаваемого (или получаемого) единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью и окружающей средой в 1°.

Соотношение (3.5) можно получить из закона теплопроводности Фурье, полагая, что при обтекании поверхности тела газом или жидкостью передача тепла от газа к телу вблизи его поверхности происходит по закону Фурье:

**qs** =-λг·(∂Тг/∂n)s·**1n**= λг·(Ts-Tc)·**1n**/∆ =α·(Ts-Tc)·**1n** (3.6)

где λг — коэффициент теплопроводности газа, ∆ — условная толщина пограничного слоя, α = λг /∆.

Следовательно, вектор теплового потока **q**s направлен по нормали *п* к изотермической поверхности, его скалярная величина равна *q*s*.*

Условная толщина пограничного слоя ∆ зависит от скорости движения газа (или жидкости) и его физических свойств. Поэтому коэффициент теплообмена зависит от скорости движения газа, его температуры и изменяется вдоль поверхности тела в направлении движения. В качестве приближения можно считать коэффициент теплообмена постоянным, не зависящим от температуры, и одинаковым для всей поверхности тела.

Граничные условия третьего рода могут быть использованы и при рассмотрении нагревания или охлаждения тел лучеиспусканием*.* По закону Стефана-Больцмана лучистый поток тепла между двумя поверхностями равен

qs(τ) = σ\*[T4s(τ) –T4a], (3.7)

где σ\* — приведенный коэффициент лучеиспускания, *Тa* — абсолютная температура поверхности тепловоспринимающего тела.

Коэффициент пропорциональности σ\* зависит от состояния поверхности тела. Для абсолютно черного тела, т. е. тела, обладающего способностью поглощать все падающее на него излучение, σ\* = 5,67·10-12 *вт/см2·*°К4. Для серых тел σ\* = ε·σ*,* где ε - коэффициент черноты, изменяющийся в пределах от 0 до 1. Для полированных металлических поверхностей коэффициенты черноты составляют при нормальной температуре от 0,2 до 0,4, а для окисленных и шероховатых поверхностей железа и стали — от 0,6 до 0,95. С повышением температуры коэффициенты ε увеличиваются и при высоких температурах, близких к температуре плавления, достигают значений от 0,9 до 0,95.

При малой разности температур (Тп - Та) соотношение (3.7) можно приближенно написать так:

qs(τ) = σ\*{[T2s(τ) +T2a]·[Ts(τ) +Ta]}·[ Ts(τ) –Ta] = α(T)· [ Ts(τ) –Ta] (3.8)

где α *(Т)* — коэффициент лучистого теплообмена, имеющий ту же размерность, что и коэффициент конвективного теплообмена, и равный

α *(Т)=* σ\*[T2s(τ) +T2a]·[Ts(τ) +Ta]= σ\*·ν(T) (3.9)

Соотношение (3.9) является выражением закона Ньютона охлаждения или нагревания тела, при этом Tа обозначает температуру поверхности тела, воспринимающего тепло. Если температура *Тs*(τ) изменяется незначительно, то коэффициент α (Т) приближенно можно принять постоянным.

Если температура окружающей среды (воздуха) *Тс* и температура тепловоспринимающего тела Та одинаковы, а коэффициент лучепоглощения среды очень мал, то в соотношении (3.9) вместо Та можно написать *Тс.* При этом небольшая доля потока тепла, отдаваемого телом путем конвекции, может быть положена равной αк·∆Т*,* где *ак* — коэффициент конвективного теплообмена.

Коэффициент конвективной теплоотдачи *αк* зависит:

1) от формы и размеров поверхности, отдающей тепло (шар, цилиндр, пластина) и от ее положения в пространстве (вертикального, горизонтального, наклонного);

2) от физических свойств теплоотдающей поверхности;

1. от свойств окружающей среды (ее плотности, теплопроводности  
   и вязкости, в свою очередь зависящих от температуры), а также
2. от разности температур *Тs* - *Тс*.

В этом случае в соотношении

*qs =* α·[Тs(τ) - *Тс*], (3.10)

коэффициент αбудет суммарным коэффициентом теплообмена:

α = αк+ α(Т) (3.11)

В дальнейшем нестационарный теплообмен тела, механизм которого описывается соотношением (3.10), будем называть теплообменом по закону Ньютона.

По закону сохранения энергии количество тепла qs(τ), отданного поверхностью тела, равно количеству тепла, которое подводится изнутри к поверхности тела в единицу времени к единице площади поверхности путем теплопроводности, т. е.

qs(τ) = α·[Тs(τ) - *Тс*(τ)] = -λ(∂T/∂n)s (3.12)

где для общности постановки задачи температура *Тс* считается переменной, а коэффициент теплообмена α*(Т)* приближенно принят постоянным [α*(Т)* = α= const].

Обычно граничное условие пишут так:

λ(∂T/∂n)s + α·[Тs(τ) - *Тс*(τ)] = 0 (3.13)

Из граничного условия третьего рода, как частный случай, можно получить граничное условие первого рода. Если отношение α*/λ* стремится к бесконечности [коэффициент теплообмена имеет большое значение (α→∞) или коэффициент теплопроводности мал (λ→ 0)], то

Тs(τ) - *Тс*(τ) = lim [1/(α∕λ)·(∂T/∂n)s] = 0

α∕λ→∞

откуда

Тs(τ) = *Тс*(τ)

т. е. температура поверхности теплоотдающего тела равна температуре окружающей среды.

Аналогично при α→0 из (x) получаем частный случай граничного условия второго рода — адиабатическое условие (равенство нулю потока тепла через поверхность тела). Адиабатическое условие представляет другой предельный случай условия теплообмена на границе, когда при весьма малом коэффициенте теплоотдачи и значительном коэффициенте теплопроводности поток тепла через граничную поверхность приближается к нулю. Поверхность металлического изделия, соприкасающегося со спокойным воздухом, при недолгом процессе может приниматься адиабатической, так как действительный поток теплообмена через поверхность незначителен. При длительном процессе поверхностный теплообмен успевает отнять у металла значительное количество тепла, и пренебрегать им уже нельзя.

4. *Граничное условие четвертого рода соответствует теплообмену поверхности тела с окружающей средой [конвективный теплообмен тела с жидкостью) или теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова.* При обтекании твердого тела потоком жидкости (или газа) передача тепла от жидкости (газа) к поверхности тела в непосредственной близости к поверхности тела (ламинарный пограничный слой или ламинарный подслой) происходит по закону теплопроводности (молекулярный перенос тепла), т. е. имеет место теплообмен, соответствующий граничному условию четвертого рода

*Тs*(τ) = [*Тс*(τ)]s (3.14)

Помимо равенства температур, имеет место также равенство потоков тепла

-λc(∂Tc/∂n)s = -λ(∂T/∂n)s (3.15)

Дадим графическую интерпретацию четырех видов граничных условий (рис. 3.1).

Скалярная величина вектора теплового потока пропорциональна абсолютной величине градиента температуры, который численно равен тангенсу угла наклона касательной к кривой распределения температуры вдоль нормали к изотермической поверхности, т.е

(∂T/∂n)s = tg φs

На рис. 3.1 изображены на поверхности тела четыре элемента поверхности *∆S* с нормалью к ней n (нормаль считается положительной, если она направлена наружу). По оси ординат отложена температура.

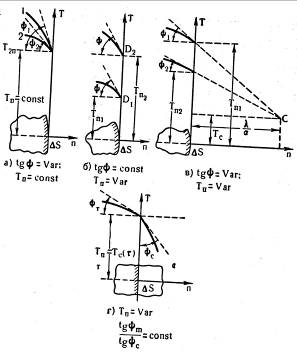


Рис. 3.1 Различные способы задания условий на поверхности

Граничное условие первого рода состоит в том, что задана *Тs* (τ); в простейшем случае *Тs* (τ) = const. Отыскивается наклон касательной к температурной кривой у поверхности тела, а тем самым и количество тепла, отдаваемое поверхностью (см. рис. 3.1., *а).*

Задачи с граничными условиями второго рода имеют обратный характер; задается тангенс угла наклона касательной к температурной кривой у поверхности тела (см. рис. 3.1, *б);* находится температура поверхности тела.

В задачах с граничными условиями третьего рода температура поверхности тела и тангенс угла наклона касательной к температурной кривой—величины переменные, но задается на внешней нормали точка *С,* через которую должны проходить все касательные к температурной кривой (см. рис. 3.1, *в).* Из граничного условия (3.13) следует

tg φs =(∂T/∂n)s = (Тs(τ) - *Тс*)/(λ∕α) (3.16)

Тангенс угла наклона касательной к температурной кривой у поверхности тела равен отношению противолежащего катета [Тs(τ)—Тc]

к прилежащему катету λ∕α соответствующего прямоугольного треугольника. Прилежащий катет λ∕α является величиной постоянной, а противолежащий катет [Тs (τ) — Тс]непрерывно изменяется в процессе теплообмена прямо пропорционально tg φs. Отсюда следует, что направляющая точка С остается неизменной.

В задачах с граничными условиями четвертого рода задается отношение тангенсов угла наклона касательных к температурным кривым в теле и в среде на границах их раздела (см. рис. 3.1, *г):*

tg φs /tg φc = λc∕λ = const (3.17)

с учетом совершенного теплового контакта (касательные у поверхности раздела проходят через одну и ту же точку).

Выбирая для расчета тип того или иного простейшего граничного условия, следует помнить, что в действительности поверхность твердого тела всегда обменивается теплом с жидкой или газообразной средой. Можно приближенно считать границу тела изотермической в тех случаях, когда интенсивность поверхностного теплообмена заведомо велика, и адиабатической – если эта интенсивность заведомо мала.