Академия России

Кафедра Физики

**Реферат**

**ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА переходных КОЛЕБАНИЙ в электрических цепях**

#### **Орел 2009**

## Содержание

# Вступление

# Основные свойства преобразования Лапласа

# Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме

# Операторные схемы замещения

Литература

**ВСТУПЛЕНИЕ**

Действия над многозначными числами, как известно, существенно упрощаются при использовании логарифмов. Так операция умножения сводится к сложению логарифмов, деление – к вычитанию логарифмов и т. д. Каждому числу соответствует свой логарифм и поэтому логарифм можно рассматривать как своего рода изображение числа.

Так, например, , следовательно, в этой системе 2 есть изображение числа 100.

В основе операторного метода также лежит понятие об изображении. Однако если в случае логарифмов речь шла об изображении числа, то в операторном методе используется изображение функций времени. Здесь каждой функции времени , определенной в области , соответствует некоторая функция новой переменной  и, наоборот, функции переменной  соответствует определенная функция времени .

Функция  называется оригиналом, функция  – изображением, а переменная  – оператором.

Фраза "функция  имеет своим изображением" условно записывается так .

Знак  называют знаком соответствия.

Основанный на таком представлении функций метод получил название операторного и используется для аналитического решения линейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в теории электрических цепей. Решение задачи при этом как бы разбивается на 3 этапа.

На первом этапе осуществляется переход из временной области в операторную, на втором – решение задачи в операторной форме и на третьем – обратный переход в область реального времени.

**Основные свойства преобразования Лапласа**

Нахождение изображений функции времени (равно как и обратные переходы от изображений к оригиналу) выполняются с помощью специальных интегральных преобразований, приводимых в курсе высшей математики. В настоящее время в большей части современной технической литературы операторные методы связывают с применением преобразования Лапласа, в основе которого лежит соотношение:

.

Важно отметить, что функции, описывающие реально возможные воздействия и соответствующие им реакции, всегда преобразуемы по Лапласу. Полученную в результате такого преобразования функцию называют иногда лапласовым изображением функции  или ее -изображением и обозначают:

.

Отыскание -изображения заданной функции называется прямым преобразованием Лапласа, а нахождение  по известному  – обратным преобразованием Лапласа.

Основные свойства и правила этих преобразований:

*Свойство единственности.* Каждому оригиналу (исходной функции) соответствует единственное изображение и наоборот, каждому изображению соответствует единственный оригинал.

*Свойство линейности.* Линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений:

 – оригинал;

 – изображение.

*Преобразование операции дифференцирования.* Если оригинал  представляет производную от некоторой функции

,

то его изображение имеет вид:

.

При нулевых начальных условиях (ННУ)  и , т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение его изображения на оператор  (при ННУ).

*Преобразование операции интегрирования.* Если оригинал представляет от некоторой функции интеграл:

,

то его изображение имеет вид: , т. е. интегрированию оригинала соответствует деление его изображения на оператор .

*Теорема запаздывания (оригинала)*. Если , то , где  — время запаздывания, т. е. запаздыванию оригинала на время  соответствует умножение его изображения на экспоненциальный множитель .

*Теорема смещения (изображения).* Если , то , т. е. умножению оригинала на экспоненциальный множитель  соответствует смещение его изображения на величину .

Решение задач прямого и обратного преобразований Лапласа существенно упрощаются в тех случаях, когда удается использовать справочные таблицы, которые содержат пары оригинал – изображение. Эти таблицы приводятся в справочниках.

Следует учесть, что при обратном преобразовании Лапласа полученные функции иногда не подходят под табличные. В этом случае используется разложение этой функции на простые дроби или в ряд с последующим применением обратного преобразования Лапласа.

**Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме**

Возможность существенного упрощения решения задачи анализа колебаний в электрических цепях операторным методом основывается на том, что для -изображений колебаний формально верны законы Кирхгофа и Ома.

Действительно, согласно первому закону Кирхгофа:



Если обе части этого равенства подвергнуть преобразованию Лапласа, то оно переходит в равенство:

,

и следовательно, *алгебраическая сумма -изображений токов в любом узле цепи равна нулю*. Аналогично доказывается справедливость второго закона Кирхгофа для операторных напряжений в контуре:

.

При выводе закона Ома в операторной форме будем полагать, что реактивные элементы находятся при ННУ (конденсатор разряжен, через катушку индуктивности не протекает ток).

Рассмотрим соотношения в элементах электрических цепей.

*Элемент резистивного сопротивления.*

 – операторное резистивное сопротивление,

 – резистивная операторная проводимость.

*R*

*i*

*R*

*u*

*R*





*p*

*I*

*R*





*p*

*U*

*R*





*p*

*Z*

*R*

*R*



*R*

*i*

*u*

*R*

*R*















*p*

*Z*

*p*

*I*

*p*

*U*

*R*

*R*

*R*





.=

.=

Таким образом, операторное напряжение на резистивном сопротивлении равно произведению сопротивления на величину операторного тока.

*Элемент индуктивности.*

 – операторное индуктивное сопротивление,

 – операторная индуктивная проводимость.

*L*

*L*

*L*

*i*

*L*

*u*





*p*

*I*

*L*





*p*

*U*

*L*

.=

.=

*dt*

*Ldi*

*u*

*L*

*L*











*p*

*LpI*

*p*

*U*

*L*

*L*



Следовательно, операторное напряжение на индуктивности равно произведению операторного индуктивного сопротивления на величину операторного тока.

*Элемент емкости.*

 – операторное емкостное сопротивление,

 – операторная емкостная проводимость.

*С*

*С*

.=

.=

*C*

*i*

*C*

*u*





*p*

*I*

*C*





*p*

*U*

*C*

*dt*

*Cdu*

*i*

*C*

*C*











*p*

*CpU*

*p*

*I*

*C*

*C*



Операторное напряжение на емкости равно произведению операторного емкостного сопротивления на величину операторного тока.

Выражения



представляют закон Ома в операторной форме.

Выводы:

– законы Кирхгофа и Ома справедливы и в операторной форме, причем закон Ома справедлив только при нулевых начальных условиях;

– все ранее изученные методы анализа электрических цепей (метод контурных токов, метод узловых напряжений, метод эквивалентного генератора и др.) справедливы и в операторной форме.

Операторные схемы замещения реактивных элементов  
при ненулевых начальных условиях

Часто коммутация осуществляется в момент времени, когда реактивные элементы обладают энергией. В этом случае они находятся при ненулевых начальных условиях и к ним нельзя применить закон Ома в операторной форме. Для устранения этого препятствия используют прием, суть которого состоит в том, что физически один реактивный элемент искусственно заменяют двумя: операторным источником, отражающим энергию реактивного элемента на момент коммутации, и самим реактивным элементом, но находящимся теперь уже при нулевых начальных условиях. Такое изображение называется схемой замещения. Ее можно получить, используя свойства преобразования Лапласа:

.

Так, для индуктивности с током схемы замещения имеют вид, показанный на рисунке 1.

.=

*L*





*L*

*I*

*L*

0





*p*

*U*

*L*





*p*

*LpI*

*L*

*L*





*p*

*I*

*L*

0





*p*

*I*

*L*





*p*

*U*

*L*





*pL*

*p*

*U*

*L*





*t*

*i*

*L*





*t*

*u*

*L*

*L*





*p*

*I*

*L*

а) б) в)

Рис. 1

Они являются следствием преобразования следующих выражений:

**; **

****

****

Здесь следует иметь в виду два обстоятельства: направление операторного тока должно совпадать с направлением тока через индуктивность в момент непосредственно предшествующий коммутации и второе, что реально существует один элемент, поэтому операторный ток через индуктивность в схеме замещения определяется в общей ветви (рис. 1б).

Заряженная емкость отображается схемами замещения, показанными на рисунке 2б, в.

*С*





*t*

*i*

*C*





*t*

*u*

*C*





*p*

*U*

*C*

0





*pC*

*p*

*I*

*C*





*p*

*I*

*C*





*p*

*U*

*C*

.=





*p*

*I*

*C*





*p*

*CpU*

*C*





0

*C*

*CI*

1

1

1

1

1

1

а) б) в)

Рис. 2

Они являются следствием преобразования следующих выражений:

,

.

Здесь напряжение операторного источника совпадает с напряжением на емкости до коммутации, а операторное напряжение на емкости определяется между зажимами 1 – 1.

Применение операторных схем замещения реактивных элементов, находящихся при ненулевых начальных условиях, дает возможность применять закон Ома в операторной форме, что широко используется на практике и, в частности, при рассмотрении свободных колебаний в электрических цепях. Известно, что такие колебания возникают за счет энергии, запасенной реактивными элементами при отключении внешних источников. Следует иметь в виду, что указанная коммутация может осуществляться как путем механического отключения, так и путем гашения источников. В последнем случае источник напряжения заменяется коротким замыканием, а источник тока – обрывом.

При решении задач приходится осуществлять переход от обычной к операторной схеме. Если реактивные элементы находятся при ННУ, то такой переход не вызывает особых затруднений. Например, на рисунке 3, а показана исходная схема, а на рисунке 3, б – эквивалентная ей операторная.

*L*

1

*R*

2

*R*

*С*

*E*

.=



*pL*

1

*R*

2

*R*

*pC*

1





*p*

*E*

*p*

*E*



а) б)

Рис. 3

Если же реактивные элементы находятся при ненулевых начальных условиях, то в операторной схеме они должны быть отображены схемами замещения.

Пример.

Пусть в цепи, изображенной на рисунке 4 в момент  замыкается ключ "*К*". Требуется определить эквивалентную ей операторную схему.

0

*I*

*R*

*R*

*R*

*С*

*L*

*K*



****

*t*

*u*

Рис. 4

Так как реактивные элементы в данном случае находятся при ненулевых начальных условиях, то предварительно следует определить  и . Для этого изобразим эквивалентную схему цепи при  (рис. 5).





*p*

*I*

0

*R*

*R*

*С*

*L*





*p*

*U*

*C*





*p*

*I*

*L*





*p*

*E*

*C*

Рис. 5

Видно, что ; .

Таким образом ;  и соответствующая этому схема показана на рисунке 6.

0

*I*

*R*

*R*

*R*

*С*

*L*





0

*C*

*u*





0

*L*

*i*

Рис. 6

Далее находится требуемая реакция в операторной форме, а затем осуществляется переход в область реального времени.

Вывод: нахождение реакций при ненулевых начальных условиях требует применения схем замещения в операторной форме и является более сложной задачей, чем при ННУ.

#### **Литература**

1. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей. - М.: Радио и связь, 1986.

2. Шалашов Г. В. Переходные процессы в электрических цепях. – Орел: ОВВКУС 1981.