Реферат по стереометрии

Ученика 11 “В” класса

Алексеенко Николая

Тема :

Движение.

Спасибо за внимание !

29.10.1995 г.

Школа # 1278, кл. 11 “В”.

Движения. Преобразования фигур.

При создании реферата были использованы следующие книги:

1. “Геометрия для 9-10 классов”. А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик.

2. “Геометрия”. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.

3. “Математика”. В.А.Гусев, А.Г.Мордкович.

Все рисунки находятся на отдельном листе, приложенном к реферату. Решения задач также на отдельном листе. Доказательства основных теорем, связанных с движением, я также привожу на отдельных листках. В реферате - только определения и классификация.

Движением в геометрии называется отображение, сохраняющее расстояние. Следует разъяснить, что подразумевается под словом “отображение”.

1. Отображения, образы, композиции отображений.

**Отображением множества M в множество N** называется соответствие каждому элементу из M единственного элемента из N.

Мы будем рассматривать только отображение фигур в пространстве. Никакие другие отображения не рассматриваются, и потому слово “отображение” означает соответствие точкам точек.

О точке X’, соответствующей при данном отображении f точке X, говорят, что она является **образом точки** X, и пишут X’ = f(X). Множество точек X’, соответствующих точкам фигуры M, при отображении f называется **образом фигуры** M и обозначается M’ = f(M).

Если образом M является вся фигура N, т.е. f(M) = N, то говорят об **отображении фигуры** M **на фигуру** N.

Отображение называется **взаимно однозначным**, если при этом отображении образы каждых двух различных точек различны.

Пусть у нас есть взаимно однозначное отображение f множества M на N. Тогда каждая точка X’ множества N является образом только одной (единственной) точки X множества M. Поэтому каждой точке X’ ⊂ N можно поставить в соответствие ту единственную точку X ⊂ M, образом которой при отображении f является точка X’. Тем самым мы определим отображение множества N на множество M, оно называется **обратным** для отображения f и обозначается f. Если отображение f имеет обратное, то оно называется **обратимым.**

Неподвижной точкой отображения ϕ называется такая точка A, что

ϕ(A) = A.

Из данных определений непосредственно следует, что если отображение f обратимо, то обратное ему отображение f также обратимо и (f ) = f. Поэтому отображения f и f называются также **взаимно обратными.**

Пусть заданы два отображения: отображение f множества M в множество N и отображение g множества N в множество P. Если при отображении f точка

X ⊂ N перешла в точку X’ = f(X) ⊂ N, а затем X’ при отображении g перешла в точку X’’ ⊂ P, то тем самым в результате X перешла в X’’ (рис.1).

В результате получается некоторое отображение h множества M в множество P. Отображение h называется **композицией отображения** f с **последующим отображением** g.

Если данное отображение f обратимо, то, применяя его, а потом обратное ему отображение f , вернем, очевидно, все точки в исходное положение, т.е. получим **тождественное отображение**, такое, которое каждой точке сопоставляет эту же точку.

2. Определение движения.

**Движением (или перемещением) фигуры называется такое ее отображение, при котором каждым двум ее точкам A и B соответствуют такие точки A’ и B’, что |A’B’| = |AB|.** (рис.2).

*Тождественное отображение является одним из частных случаев движения*.

**Фигура F’ называется равной фигуре F, если она может быть получена из F движением.**

3. Общие свойства движения.

Свойство 1 (*сохранение прямолинейности*).

***При движении три точки, лежащие на прямой, переходят в три точки, лежащие на прямой, причем точка, лежащая между двумя другими, переходит в точку, лежащую между образами двух других точек*** (сохраняется порядок их взаимного расположения).

Доказательство. Из планиметрии известно, что три точки A, B, C лежат на прямой тогда и только тогда, когда одна из них, например точка B, лежит между двумя другими - точками A и C, т.е. когда выполняется равенство

|AB| + |BC| = |AC|.

При движении расстояния сохраняются, а значит, соответствующее равенство выполняется и для точек A’, B’, C’:

|A’B’| + |B’C’| = |A’C’|.

Таким образом, точки A’, B’, C’ лежат на одной прямой и именно точка B’ лежит между A’ и C’.

Из данного свойства следуют также еще несколько свойств:

Свойство 2. ***Образом отрезка при движении является отрезок.***

Свойство 3. ***Образом прямой при движении является прямая, а образом луча - луч.***

Свойство 4. ***При движении образом треугольника является равный ему треугольник, образом плоскости - плоскость, причем параллельные плоскости отображаются на параллельные плоскости, образом полуплоскости - полуплоскость.***

Свойство 5. ***При движении образом тетраэдра является тетраэдр, образом пространства - все пространство, образом полупространства - полупространство***.

Свойство 6. ***При движении углы сохраняются, т.е. всякий угол отображается на угол того же вида и той же величины. Аналогичное верно и для двугранных углов.***

Сначала я рассмотрю все основные виды движений, а затем сведу их в единую систему.

4. Параллельный перенос.

Определение. **Параллельным переносом, или, короче, переносом фигуры, называется такое ее отображение, при котором все ее точки смещаются в одном и том же направлении на равные расстояния** (рис.3), **т.е. при переносе каждым двум точкам X и Y фигуры сопоставляются такие точки X’ и Y’, что**

**XX’ = YY’.**

Основное свойство переноса: ***Параллельный перенос сохраняет расстояния и направления***, т.е.

X’Y’ = XY.

Отсюда выходит, что ***параллельный перенос есть движение, сохраняющее направление*** и наоборот***, движение, сохраняющее направление, есть параллельный перенос.***

Из этих утверждений также вытекает, что ***композиция параллельных переносов есть параллельный перенос.***

***Параллельный перенос фигуры задается указанием одной пары соответствующих точек.*** Например, если указано, в какую точку A’ переходит

данная точка A, то этот *перенос задан вектором AA’*, и это означает, что все точки

смещаются на один и тот же вектор, т.е. XX’ = AA’ для всех точек Х.

5. Центральная симметрия.

Определение 1. **Точки A и A’ называются симметричными относительно точки О, если точки A, A’, O лежат на одной прямой и OX = OX’. Точка О считается симметричной сама себе (относительно О).**

**Две фигуры называются симметричными относительно точки О, если для каждой точки одной фигуры есть симметричная ей относительно точки О точка в другой фигуре и обратно.**

Как частный случай, фигура может быть симметрична сама себе относительно некоей точки О. Тогда эта точка О называется **центром симметрии фигуры,** а фигура - **центрально-симметричной.**

Определение 2. **Центральной симметрией фигуры относительно О называется такое отображение этой фигуры, которое сопоставляет каждой ее точке точку, симметричную относительно О.**

Основное свойство : ***Центральная симметрия сохраняет расстояние, а направление изменяет на противоположное. Иначе говоря, любым двум точкам X и Y фигуры F соответствуют такие точки X’ и Y’, что***

***X’Y’ = -XY.***

Доказательство. Пусть при центральной симметрии с центром в точке О точки X и Y отобразились на X’ и Y’. Тогда, как ясно из определения центральной симметрии (рис.4),

OX’ = -OX, OY’ = -OY.

Вместе с тем

XY = OY - OX, X’Y’ = OY’ - OX’.

Поэтому имеем:

X’Y’ = -OY + OX = -XY.

Отсюда выходит, что ***центральная симметрия является движением, изменяющим направление на противоположное*** и наоборот, ***движение, изменяющее направление на противоположное, есть центральная симметрия.***

*Центральная симметрия фигуры задается указанием одной пары существующих точек:* если точка А отображается на А’, то центр симметрии - это середина отрезка AA’.

6. Зеркальная симметрия (отражение в плоскости).

Определение 1. **Точки A и A’ называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок AA’ перпендикулярен этой плоскости и делится ею пополам. Любая точка плоскости α считается симметричной самой себе относительно этой плоскости** (рис.5).

Две фигуры F и F’ называются **симметричными относительно данной плоскости,** если они состоят из точек, попарно симметричных относительно этой плоскости, т.е. если для каждой точки одной фигуры есть симметричная ей точка в другой фигуре.

Если преобразование симметрии относительно плоскости переводит фигуру в себя, то фигура называется **симметричной относительно плоскости α,** а плоскость α - **плоскостью симметрии.**

Определение 2. **Отображение фигуры, при котором каждой ее точке соответствует точка, симметричная ей относительно данной плоскости, называется отражением фигуры в этой плоскости (или зеркальной симметрией).**

Теорема 1. ***Отражение в плоскости сохраняет расстояния и, стало быть, является движением.***

См. Доказательство 1.

Теорема 2. ***Движение, при котором все точки некоторой плоскости неподвижны, является отражением в этой плоскости или тождественным отображением.***

*Зеркальная симметрия задается указанием одной пары соответствующих точек, не лежащих в плоскости симметрии*: плоскость симметрии проходит через середину отрезка, соединяющего эти точки, перпендикулярно к нему.

7. Поворот вокруг прямой.

Для более четкого представления о повороте вокруг прямой следует вспомнить поворот на плоскости около данной точки. **Поворотом на плоскости около данной точки** называется такое движение, при котором каждый луч, исходящий из данной точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении (рис.6). Перейдем теперь к повороту в пространстве.

Определение. **Поворотом фигуры вокруг прямой *a* на угол ϕ называется такое отображение, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной прямой *a*, происходит поворот вокруг точки ее пересечения с прямой *a* на один и тот же угол ϕ в одном и том же направлении** (рис. 7). **Прямая *a* называется осью поворота, а угол ϕ - углом поворота.**

Отсюда видим, что поворот всегда задается осью, углом и направлением поворота.

Теорема 1. ***Поворот вокруг прямой сохраняет расстояния, т.е. является движением.***

См. Доказательство 2.

Теорема 2. ***Если движение пространства имеет множеством своих неподвижных точек прямую, то оно является поворотом вокруг этой прямой.***

7.1. Фигуры вращения.

**Фигура называется фигурой вращения, если существует такая прямая, любой поворот вокруг которой совмещает фигуру саму с собой, другими словами, отображает ее саму на себя.** Такая прямая называется **осью вращения фигуры.** Простейшие тела вращения : шар, прямой круговой цилиндр, прямой круговой конус.

7.2. Осевая симметрия.

Частнымслучаем поворота вокруг прямой является поворот на 180°. При повороте вокруг прямой *a* на 180° каждая точка A переходит в такую точку A’, что прямая *a* перпендикулярна отрезку AA’ и пересекает его в середине. Про такие точки A и A’ говорят, что они симметричны относительно оси *a.* *Поэтому поворот на 180° вокруг прямой является называется осевой симметрией в пространстве*.

8.1. Неподвижные точки движений пространства.

Важной характеристикой движения пространства является множество его неподвижных точек. Здесь могут представиться лишь следующие пять случаев:

***У движения неподвижных точек нет*** (нетождественный параллельный перенос).

***Движение имеет лишь одну неподвижную точку*** (центральная симметрия).

***Множество неподвижных точек движения пространства является прямой*** (поворот вокруг прямой).

***Множество неподвижных точек движения пространства является плоскостью*** (зеркальная симметрия).

***Множество неподвижных точек движения пространства является всем пространством*** (тождественное движение).

Данная классификация очень удобна, так как представляет все виды движения как единую систему.

8.2. Основные теоремы о задании движений пространства.

Теорема 1. ***Пусть в пространстве даны два равных треугольника ABC и A’B’C’. Тогда существуют два и только два таких движения пространства, которые переводят A в A’, B в B’, C в C’. Каждое из этих движений получается из другого с помощью композиции его с отражением в плоскости A’B’C’.***

Теорема 2. ***Пусть в пространстве заданы два равных тетраэдра ABCD и A’B’C’D’. Тогда существует единственное движение пространства ϕ, такое, что ϕ (A) = A’, ϕ (B) = B’, ϕ (C) = C’, ϕ (D) = D’.***

9. Два рода движений.

Следует также знать, что все движения подразделяются на два рода в зависимости от того, непрерывны они или нет. Для лучшего понимания сущности этого разделения введу понятие базиса и его ориентации.

9.1. Базисы и их ориентация.

***Базисом в пространстве*** называется любая тройка векторов, непараллельных одновременно никакой плоскости.

Тройка базисных векторов называется **правой (левой),** если эти векторы, отложенные от одной точки, располагаются так, как расположены соответственно большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки.

Если имеются две правые (левые) тройки векторов, говорят, что эти тройки **ориентированы одинаково.** Если одна тройка является правой, а вторая - левой, то они **ориентированы противоположно.**

9.2. Два рода движения.

**Движения первого рода - такие движения, которые сохраняют ориентацию базисов некоей фигуры.** *Они могут быть реализованы непрерывными движениями.*

**Движения второго рода - такие движения, которые изменяют ориентацию базисов на противоположную.** *Они не могут быть реализованы непрерывными движениями.*

Примерами движений первого рода являются перенос и поворот вокруг прямой, а движениями второго рода - центральная и зеркальная симметрии.

***Композицией любого числа движений первого рода является движение первого рода.***

***Композиция четного числа движений второго рода есть движение 1 рода, а композиция нечетного числа движений 2 рода - движение 2 рода.***

10. Некоторые распространенные композиции.

Рассмотрим теперь некоторые комбинации движений, используемые достаточно часто, но не уделяя им особого внимания.

10.1. Композиции отражений в плоскости.

Теорема 1. ***Движение пространства первого рода представимо в виде композиции двух или четырех отражений в плоскости.***

***Движение пространства второго вида есть либо отражение в плоскости, либо представимо в виде композиции трех отражений в плоскости.***

Отсюда мы можем объяснить уже известные нам движения так:

*Композиция отражения в 2 параллельных плоскостях есть параллельный перенос.*

*Композиция отражения в 2 пересекающихся плоскостях есть поворот вокруг прямой пересечения этих плоскостей.*

*Центральная симметрия относительно данной точки является композицией 3 отражений относительно любых 3 взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся в этой точке.*

10.2. Винтовые движения.

Определение. **Винтовым движением называется композиция поворота и переноса на вектор, параллельный оси поворота. Представление о таком движении дает ввинчивающийся или вывинчивающийся винт.**

Теорема 2. ***Любое движение пространства первого рода - винтовое движение (в частности поворот вокруг прямой или перенос).***

10.3. Зеркальный поворот.

Определение. **Зеркальным поворотом вокруг оси *a* на угол ϕ называется композиция поворота вокруг оси *a* на угол ϕ и отражения в плоскости, перпендикулярной оси поворота.**

Теорема 3. ***Любое движение пространства второго рода, имеющее неподвижную точку, является зеркальным поворотом, который, в частности, может быть центральной или зеркальной симметрией.***

10.4. Скользящие отражения.

Определение. **Скользящим отражением называется композиция отражения в некоей плоскости и переноса на вектор, параллельный этой плоскости.**

Теорема 4. ***Движение пространства второго рода, не имеющее неподвижных точек, есть скользящее отражение.***

Теорема Шаля. ***Движение плоскости первого рода является либо поворотом, либо параллельным переносом.***

***Движение плоскости второго рода является скользящим отражением.***

Примечание: К реферату прилагаются 7 рисунков, 2 письменных доказательства теорем и решения задач.

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !**

Реферат составлен и напечатан Николаем Алексеенко в редакторе Word for Windows 6.0.