Академия России

Кафедра Физики

Реферат на тему:

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ**

#### **Орел 2009**

**Содержание**

Введение

Спектральный состав периодических колебаний

Анализ периодических колебаний

Частотный состав непериодического колебания

Библиографический список

### Вступление

Среди разнообразных систем ортогональных функций, которые могут использоваться в качестве базисов для представления радиотехнических сигналов, исключительное место занимают гармонические функции. Их значение обусловлено рядом причин, основными из которых являются:

– гармонические сигналы инвариантны (не изменяются) относительно преобразований, осуществляемых стационарными линейными электрическими цепями. Если такая цепь возбуждена источником гармонических колебаний, то сигнал на выходе цепи остается гармоническим с той же частотой, отличаясь от входного сигнала лишь амплитудой и начальной фазой;

– техника генерирования гармонических сигналов достаточно проста.

Кроме того, известно (курс математики), что любое негармоническое колебание, удовлетворяющее определенным условиям, можно представить в виде суммы гармонических колебаний. При этом говорят, что осуществлено спектральное разложение этого сигнала, а отдельные гармонические компоненты сигнала образуют его спектр.

**Спектральный состав периодических колебаний**

Математической моделью процесса, повторяющегося во времени, является периодическое колебание со следующим свойством:



, *n* = 1, 2, …,



где *Т* – период колебания.

Известно, что любая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле (интервал, на котором функция определена, может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых функция непрерывна и монотонна, и во всякой точке разрыва функции существуют переходы от одного конечного значения к другому), может быть представлена рядом Фурье. Если ряд Фурье представлен в тригонометрической форме, то его запись имеет следующий вид:

, k = 0, 1, 2, …,



где .



То есть периодическое колебание можно представить как сумму постоянной составляющей и гармонических колебаний с частотами *k*1 (гармоник), причем совокупность амплитуд гармоник называется спектром амплитуд колебания , а совокупность начальных фаз называется спектром фаз колебания .



Очень часто используют комплексную форму ряда Фурье. Для перехода к этой форме воспользуемся формулой Эйлера:

.



Тогда ряд Фурье запишется в виде

.



Отсюда легко определяются комплексные амплитуды гармоник:

.



Поскольку периодическое колебание известного периода Т полностью описывается совокупностью амплитуд и фаз своих составляющих, то задание спектра такого колебания сводится к заданию его спектров амплитуд и фаз.



Пример графического изображения спектров амплитуд и фаз некоторого периодического колебания приведен на рисунке 1.



Рис. 1. Графическое изображение спектров амплитуд и фаз колебания

Каждая частотная составляющая изображается на графике спектра одним вертикальным отрезком – спектральной линией. Длина отрезка определяет величину амплитуды или начальной фазы , а местоположение отрезка на оси частот – частоту составляющей ().



Иногда пользуются и табличным способом задания спектра (табл. 1).

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Частота | 0 |  |  |  |  |
| Амплитуда |  |  |  |  |  |
| Начальная фаза | – |  |  |  |  |

*Пример.* Определить спектральный состав колебания, представляющего собой периодическую последовательность прямоугольных видеоимпульсов с известными параметрами .



*Решение.*

В радиотехнике отношение называют скважностью последовательности. По формуле ряда Фурье в комплексной форме находим



.



Комплексная амплитуда пропорциональна функции вида , график которой показан на рисунке 2.



Рис. 2. График функции



Амплитуды гармоник определяются как модуль :



и пропорциональны функции вида , график которой показан на рисунке 4.



Рис. 4. График функции



График спектра амплитуд при показан на рисунке 5.



Рис. 5. График спектра амплитуд

Пунктирная линия, построенная по формуле , называется огибающей спектра амплитуд, в которую вписываются амплитуды гармоник на своих частотах . Нули огибающей будут на тех частотах, на которых



(*n* = 1, 2, 3, …),



откуда . Постоянная составляющая определяется как .



В пределах первого лепестка огибающей спектра амплитуд () комплексная амплитуда положительна и вещественна, значит (). В области частот величина вещественна и отрицательна, значит (). Следовательно, начальные фазы гармоник изменяются на 180 при переходе через нули огибающей. График спектра фаз показан на рисунке 6.



Рис. 6. График спектра фаз

Изменение периода следования импульсов *Т* приводит к сгущению (при увеличении) или разряжению (при уменьшении) спектральных линий.

Изменение длительности импульсов вызывает смещение нулей огибающей на оси частот, положение же спектральных линий при этом остается без изменения. В том случае, когда скважность последовательности импульсов , последовательность обладает богатым спектром, содержащим очень большое число медленно убывающих по амплитуде гармоник, и широко используется в синтезаторах частот.



Спектр амплитуд позволяет наглядно судить о соотношении между амплитудами гармоник и о полосе частот, в пределах которой расположены энергетически значительные частотные составляющие.

Для периодического колебания средняя мощность *Р*ср может быть представлена формулой



.



Кроме того, доказано, что средняя мощность периодического колебания равна сумме средних мощностей составляющих гармоник:

.



Это равенство называют равенством Парсеваля. Сопоставляя квадраты амплитуд гармоник, можно судить о распределении общей мощности периодического колебания по диапазону частот, а, следовательно, строить радиотехнические устройства, ограничивая спектр передаваемого колебания требуемым числом спектральных составляющих, тем самым уменьшая частотный диапазон передаваемых сигналов. Обычно спектр ограничивают частотой, на которой сумма мощностей постоянной составляющей и вошедших в этот диапазон гармоник составляет не менее 90 % полной средней мощности колебания.

**Анализ периодических колебаний в электрических цепях**

В основу анализа линейных электрических цепей, находящихся под воздействием периодических негармонических колебаний, лежит принцип наложения. Его суть применительно к негармоническим воздействиям сводится к разложению негармонического периодического колебания в одну из форм ряда Фурье и определения реакции цепи от каждой гармоники в отдельности. Результирующая реакция находится как сумма полученных частных реакций.

Анализ проведем на примере. Пусть ко входу последовательной *RC*-цепи (рис. 7) подведено воздействие в виде периодической последовательности видеоимпульсов с амплитудой *А = Е* и скважностью .



Рис. 7

Требуется определить реакцию – напряжение на элементе емкости .



На вход цепи поступает периодическое колебание, разложение которого в ряд Фурье дает следующий результат:



Из ряда видно, что в составе разложения отсутствуют гармоники с четными номерами, так как скважность последовательности импульсов равна 2. Ограничимся первыми тремя членами разложения. Приложенное напряжение содержит постоянную составляющую , первую и третью гармоники с нулевыми начальными фазами. Найдем напряжение на емкости от постоянной составляющей приложенного напряжения:



.



Комплексное действующее напряжение от первой гармоники будет равно:



Аналогично находим напряжение на емкости от 3-й гармоники

.



Теперь можно записать мгновенное значение напряжения на емкости в виде ряда:

.



Действующее значение напряжения определяем, как

.



**Частотный состав непериодического колебания**

От периодического колебания к непериодическому можно просто перейти, если не изменяя формы импульса безгранично увеличивать период его следования, что, в свою очередь, приведет к бесконечно близкому расположению друг к другу спектральных составляющих, а значения их амплитуд становятся бесконечно малыми. Однако начальные фазы этих составляющих таковы, что сумма бесконечно большого числа гармонических колебаний бесконечно малых амплитуд отличается от нуля и равна функции только там, где существует импульс. Поэтому понятие спектра амплитуд для непериодического колебания не имеет смысла, и его заменяют, используя прямое и обратное преобразования Фурье.

Известно, что функция, удовлетворяющая заданным условиям, может быть представлена интегралом Фурье (обратное преобразование Фурье)

.



Используя прямое преобразование Фурье, приходим к интегралу

.



Функция называется комплексной спектральной плотностью амплитуд, а ее модуль – спектральной плотностью амплитуд. Аргумент называют фазовым спектром непериодического колебания.



В качестве примера рассмотрим колебание, описываемое экспоненциальной функцией при положительном вещественном значении параметра .



Найдем спектральную плотность:



Особенностью комплексного спектра является его распространение, как на положительную, так и на отрицательную области частот. Графики нормированного амплитудного и фазового спектров представлены на рисунке 8.



а б

Рис. 8. Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса:

а – нормированный амплитудный спектр; б – фазовый спектр

**Распределение энергии в спектре непериодического колебания**

Пусть непериодическое колебание описывается функцией . Тогда можно записать



.



Проинтегрируем это выражение по переменной в бесконечных пределах:



В этом выражении

,



где – комплексная величина, сопряженная с .



Следовательно,

.



Произведение двух сопряженных комплексных величин равно квадрату модуля одной из них, поэтому

.



Так как левая часть равенства определяет энергию колебания , то это можно сказать и о правой части. Но тогда



есть ни что иное, как энергия колебания, приходящаяся на один радиан полосы частот для текущей частоты .

Иными словами, является спектральной плотностью энергии колебания и характеризует распределение энергии в полосе частот колебания:



.



Энергетически значимые участки спектра расположены в тех частотных полосах, в которых значение спектральной плотности относительно велики.



Пример. Определить спектральную плотность энергии прямоугольного видеоимпульса с параметрами: длительность , амплитуда и располагается симметрично относительно начала отсчета времени.



На основании формулы прямого преобразования Фурье найдем спектральную плотность амплитуд



Спектральную плотность энергии легко определить путем возведения в квадрат спектральной плотности амплитуд:



Введем безразмерную переменную и представим результаты определения спектральной плотности амплитуд и спектральной плотности энергии в следующем виде:



;



.



Теперь легко построить нормированные спектры как функций безразмерной частотной переменной (рис. 9 и 10).



Рис. 9. График нормированной спектральной плотности прямоугольного видеоимпульса как функции параметра



Рис. 10. Нормированный энергетический спектр прямоугольного

видеоимпульса как функции безразмерной частотной переменной



**Библиографический список**

1. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей.– М.: Радио и связь, 1986.
2. Суднищиков В. С. Основы теории передачи и устройства преобразования сигналов (часть 1).– Орел:
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.– М.: Наука, 1986.

.