**В.Б.Кирьянов**

**ЗАДАЧА РАВНОВЕСИЯ**

**Лекции по математическим методам микроэкономики**

**Кафедра высшей математики. С.ПбУЭФ, 1996**

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Глава первая. ЗАДАЧИ РАВНОВЕСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

. . . по самой своей природе математические методы

не могут прилагаться непосредственно к действительности,

а только к математическим моделям того или иного круга явлений.

Л.В.Канторович и А.Б.Горстко [ , c.6].

СОДЕРЖАНИЕ ПЕРВОЙ ГЛАВЫ

2

1.1. Задача затрат

1. Классификация задач.

2. Векторные обозначения.

3. Табличное представление.

4. Количественная часть задачи затрат.

7

1.2. Ценовая часть задачи затрат

1. Оценивание изделий.

2. Ценовые условия равновесия.

3. Равновесные цены изделий.

4. Правила двойственного соответствия.

5. Транспонирование.

11

1.3. Задача выпуска

1. Табличное представление.

2. Количественная часть задачи выпуска.

3. Ценовая часть задачи выпуска.

4. Каноническая пара задач.

16

1.4. Задача равновесия

Физическое содержание задачи равновесия.

1.5. История и литература

### 1.1. Задача затрат

**1.Классификация задач.** Начнем изучение задачи равновесия с простых экономических примеров.

Рассматривая массовое производство каких-нибудь обычных изделий, например - строительство жилых домов (производство автомобилей, компьютеров и т.п.),- мы увидим: всякое такое дело оказывается состоящим из двух взаимосвязанных производств: производства строительных материалов (автомобильных агрегатов, микросхем и проч.) и собственно строительства (сборочного производства). При этом, производство строительных материалов представляет собою процесс разложения сложного природного сырья в ряд простых изделий, например: круглого леса в доски стандартных размеров,- и наоборот: строительное производство есть процесс сборки из простых строительных материалов различных сложных построек. Для нас здесь важно то, что в развитом народном хозяйстве оба эти производства - и произвольный лесопильный завод, и какая-нибудь строительная артель - действуют на различных рынках: в нашем случае - на рынке пиломатериалов и на рынке строительных услуг,- и являются, вообще говоря, независимыми друг от друга. В терминах народохозяйственной модели "затра­ты-выпуск" Леонтьева (см.1.5.1) задача разложения сырья является задачей затрат, а задача сборки изделий - задачей выпуска.

Кроме того: всякий управляющий промышленным производством, независимо от того, действует ли он в перерабатывающей или сборочной областях промышленности, участвует во внешней рыночной деятельности двояким образом: и как потребитель, покупающий сырье для своего производства, и как производитель, продающий произведенные им изделия. Покупка сырья составляет его расход, а продажа изделий - доход. По этой причине, задача разумного управления промышленным предприятием оказывается для него состоящей из двух задач: задачи минимизации расходов и, одновременно, - задачи максимизации доходов того же самого промышленного производства. Такая пара задач называется взаимно двойственной.

В итоге, множество задач научного производственного управления образуется из задач четырех видов: из задачи разложения сырья и задачи сборки изделий, каждая из которых, в свою очередь, распадается в пару прямой и ей двойственной подзадач:

|  |  |
| --- | --- |
|  | прямая подзадача; |
| Задача затрат: |  |
|  | двойственная подзадача. |
|  |  |
|  | прямая и |
| Задача выпуска: |  |
|  | двойственная подзадачи. |

Их точной модельной постановке и посвящена первая глава наших лекций.

**2.Векторные обозначения.**  И промышленное сырье, и изделия из него являются товарами, и как всякие товары описываются парой взаимосвязанных величин: количеством *q* (от *quantity*) и ценой *p* (от *price*). Поэтому описание производства как преобразования сырья в изделия имеет дело с двумя их связанными парами: количествами и ценами сырья, и количествами и ценами изделий. Для удобства различения этих величин те из них, которые относятся к сырьевым или первичным товарам, мы будем снабжать первым значком “*1”*, а относящиеся к производимым или вторичным товарам - значком “*2”*, например: *q1* и *p1*, *q2* и *p2 .*

При использовании *m* видов сырья для производства *n* видов изделий: *m, n = 1, 2, …,* как их количества, так и цены становятся многокомпонентными или векторными величинами. В матричном исчислении их представляют одностолбцовыми или однострочными матрицами, различение которых связано с несимметричностью закона матричного умножения по правилу “строка на столбец”. Нам будет удобно первые значки количественным векторам приписывать сверху и их составляющие *q 11* , …, *q1m* и *q 21* , …, *q2n* в матричном представлении записывать в виде одностолбцовых *m × 1*  и *n × 1*  матриц соответственно:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *q 1 =* | *q 11*  *…*  *q 1m* | *; q 2 =* | *q 21*  *…*  *q 2n* | *;* |

а те же первые значки ценовым векторам мы будем приписывать снизу: *p1* и *p2* , и их составляющие *p11* , …, *p1m* и *p21* , …, *p2n* записывать в виде однострочных *1 × т* и *1 × n* матриц:

*р1* = ( *p1 1* … *p1 m* ) ; *р2* = ( *p2 1* … *p2 n*).

Имеющие одни и те же пространственные размерности количественный и ценовый векторы одного и того же наборов товаров мы будем называть взаимно-двойст­венными векторами. Они обладают тем свойством, что их матричное произведение по правилу “строка на столбец”, например:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *p1 q 1 =*  ( *p1 1* … *p1 m*) | *q 11*  …  *q 1m* | = *p1 1 q 11 + … + p1 m q 1m* ≡〈 *p1 , q 1* 〉, |

дает одноклеточную *1 × 1* матрицу или “скаляр” (число) 〈 *p1 , q 1* 〉 - сумму покомпонентных произведений перемножаемых векторов, называемую их скалярным произведением или, коротко, сверткой этих векторов.

На протяжении всех наших лекций сторочные латинские буквы с двумя значками будут обозначать одномерные величины или числа, те же буквы с одним значком - соответствующие векторы, а буквы без значков - матрицы или операторы. Причем всегда нижний значок матричных составляющих будет нумеровать строки, а верхний - столбцы.

**3.Табличное представление.** Задача затрат представляет собою задачу переработки *m* взаимозаменяемых видов “сложного” сырья в *n* видов “простых” изделий. В линейном случае ее технология задается *n× m* таблицей неотрицательных чисел *a11*, …, *anm* :

*al k* [количество *l-*изделий / на единицу *k-*сырья] *≥ 0 ;*

*l* = *1, … , n;*  *k* = *1, … , m;*  *m, n = 1, 2, … ,*

составляющих матрицу выпуска *a*. В целом, вместе с двумя парами векторов  *q1* и  *p1 ,* и  *q2* и  *p2*  всех своих товаров, задача затрат описывается *m×n+2(m+n)* величинами и естественно представляется в следующем табличном виде:

|  | *q 11*  … *q 1m* |  |
| --- | --- | --- |
| *p2 1*  …  *p2 n* | *a1 1* … *a1 m*  … … …  *an1* … *an m* | *q 21*  …  *q 2n* |
|  | *p11* … *p1 m* |  |

Всякое производство, будь то разложение сырья или сборка изделий, является преобразованием сырья в изделия как в отношении их количеств, так и цен:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *q 1; p1* | *a*  *→* | *q 2; p2 ,* |

- и поэтому из *2m+2n* его количественных и ценовых величин одна их половина предопределяет другую. Так, в задаче затрат нам задается рыночный спрос на выпускаемые изделия (план их производства) в виде неотрицательного вектора спроса изделий *q2*  с *n*  составляющими:

*q 2l [количество. l-изделий]* *≥ 0;* *l* = *1, … , n,*

а дополнительный ему вектор *q1* спроса на потребляемое сырье подлежит определению в условиях заданных цен - неотрицательного вектора закупочных цен сырья *p1*  с *m*  составляющими

*p1 k [рубли / за единицу k-сырья] ≥ 0;* *k* = *1, … , m.*

Заданные постоянные задачи называются, также, ее параметрами, а искомые неизвестные - переменными. Для отличения параметров задачи от ее переменных мы будем снабжать параметры дополнительным значком - ноликом “ °“ сверху.

**4.Количественная часть задачи затрат. Предложение изделий.** В прямой части задачи затрат относительно заданных цен *p1* на потребляемое сырье ищется наименее расходное значение его вектора спроса *q1 .* По этой причине прямая часть задачи производственного управления называется, также, ее количественной частью.

Выпуская *alk* единиц *l-*изделий из каждой затрачиваемой единицы *k-*сырья, из *q11 , … , q1m* единиц сырья всех *m* видов изготовляют *q 21 , … , q2n* :

*q 21 = a 11 q11 + … + a 1m q1m  ;*

*…*

*q 2n = a n1 q11 + … + a nm q1m  ,*

единиц изделий каждого вида. Количества предлагаемых изделий каждого вида представляются линейными функциями *q 2l = q 2l (q1):*

*q 2l = q 2l (q1) =* 〈 *a l , q 1* 〉 *; l = 1, … , n ,*

количеств затрачиваемого сырья в виде скалярных произведений 〈*al , q 1*〉 *m-*мерного столбцового вектора *q1*  затрат сырья с *m-*мерными строчными векторами *a1 , … , a n*  матрицы затрат *a*:

*a1 =* ( *a11 … a 1m* ) ,

*…*

*an =* ( *an1 … a nm* )

- векторами выпуска изделий каждого вида из всего ассортимента потребляемого сырья.

В обычных матричных обозначениях набор линейных функций *q 2l = q 2l (q1)* образует *n-*мерный столбцовый вектор предложения изделий *q2*. Матричное представление полученных балансовых соотношений:

| *q 2 =* | *a1 1* … *a1 m*  … … …  *an1* … *an m* |  | *q 11*  …  *q 1m* | *=*  *a q1* |
| --- | --- | --- | --- | --- |

описывает осуществляемый *m×n* матрицей выпуска *a* линейное преобразование *m*  количеств потребляемого сырья всех видов в *n*  количества производимых из него изделий.

**5.Множество допустимых планов.** Допустимыми являются такие закупки сырья *q1,* при которых предложение производимых из него изделий *q2*  удовлетворяет заданному на них спросу *q2*:

|  |
| --- |
| *q 2 = a q 1 ≥ q 2* ,  *или:* предложение удовлетворяет спрос*.* |

Полученные ограничения:

*a 11 q11 + … + a 1m q1m ≥ q 21 ;*

*…*

*a n1 q11 + … + a nm q1m  ≥ q 2n ,*

являются прямыми или количественными необходимыми условиями равновесия. Их решения называются множеством допустимых планов задачи.

Как мы увидим позднее (см. ), множество решений полученной системы неравенств, вообще говоря, неоднозначно, допуская любое неотрицательное перепроизводство изделий *Δq 2 :*

*Δq 2* ≡ *q 2 − q 2 ≥ 0 .*

**6.Равновесное потребление сырья.** Издержки данного производства, то есть сто­имость приобретаемых по заданным закупочным ценам *p1 1 , … , p1m*  потребных количеств *q11 , … , q1m* всех видов сырья, образует их линейную функцию *L(q1)*:

*L(q 1) = p1 1 q 11 + … + p1m q 1m =* 〈 *p1 , q 1*〉 *,*

называемую функцией стоимости, а также целевой функцией рассматриваемой задачи. Количественная часть задачи равновесного управления состоит в отыскании на области допустимых планов закупок сырья план закупок *q1*  наименьшей стоимости *L(q1)*:

|  |
| --- |
| *q 1 :* 〈 *p1 , q 1*〉 *= min* 〈 *p1 , q 1*〉  *q1* | *a q 1 ≥ q 2 .* |

Минимизирующее функцию стоимости задачи допустимое значение искомого вектора *q1* называется его равновесным значением или, еще, оптимальным планом задачи, а полученная задача - задачей равновесного (или, что то же самое - оптимального) производственного управления. В общем случае требование минимизации стоимости обеспечивает единственность ее решения.

### 1.2. Ценовая часть задачи затрат

**1.Оценивание изделий.** В условиях того же самого производства:

|  | *q 11*  … *q 1m* |  |
| --- | --- | --- |
| *p2 1*  …  *p2 n* | *a1 1* … *a1 m*  … … …  *an1* … *an m* | *q 21*  …  *q 2n* |
|  | *p11* … *p1 m* |  |

- одновременно с веществом сырья на выпускаемые из него изделия переносится и его стоимость и возникает двойственная задача оценки сырья ценами производимых из него изделий, называемая, также, ценовой частью задачи затрат.

Действительно, изготовление из единицы сырья вида *k:* *k=1, … , m,*  *alk* штук изделий каждого вида *l: l=1, … , n,* по ценам *p2l* за штуку сообщает сырью стоимости *p1 k:*

*p1 1 = p2 1 a1 1 + … + p2 n an 1 =* 〈 *p2 , b 1*〉 *;*

*. . .*

*p1 m = p2 1 a1 m + … + p2 n an m =* 〈 *p2 , b m*〉.

в виде линейных функций

*p1 k =*  *p1 k (p2) =* 〈 *p2 , b k*〉

цен производимых из них изделий, в совокупности образующих *m*-мерный строчный вектор ценности сырья *p1*. Коэффициентными векторами этих линейных функций служат столбцы *b1  , … , bm* той же самой матрицы затрат *a:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *b 1 =* | *a1 1*  *…*  *an 1* | *; . . . , b m =* | *a1 m*  *…*  *an m* |

- векторы выпуска ассортимента изделий из сырья каждого вида.

Полученные ценовые балансовые соотношения:

| *p1 =* ( *p1 1 … p1 1*) | *a1 1* … *a1 m*  … … …  *an1* … *an m* | *= p 2 a,* |
| --- | --- | --- |

являются линейным преобразованием *p 2 a= p1*  цен выпускаемых изделий в производственные ценности потребляемого сырья, двойственным осуществляемому той же матрицей выпуска изделий *a* количественному линейному преобразованию *q2 = a q1,* сырья в изделия*.*

**2.Ценовые условия равновесия.** В условиях свободного доступа как производителей, так и потребителей товаров к сырью и технологиям, продажа всякого готового изделия его производителем становится возможной лишь при условии того, что приобретение готового изделия потребителем оказывается для него не дороже его самостоятельного изготовления. По этой причине допустимыми являются такие продажные цены *p2* выпускаемых изделий, при которых производственные ценности *p1= p1(p2)* сырья не превышают его закупочных цен *p1 :*

|  |
| --- |
| *p1 = p2 a ≤ p1 .* |

Полученные условия продаж являются двойственными или ценовыми необходимыми условиями равновесия. Они выражают тот наш потребительский опыт, в соответствии с которым товары массового производства при прочих равных условиях имеют свойство приобретаться тем охотнее, чем ниже их цена.

Множество решений ценовых ограниченийназывается множеством допустимых цен.

**3.Равновесные цены изделий.** Доход производства, даваемый стоимостью продаваемых по ценам *p21, … , p2n*  требуемых количеств *q21 ,… , q2n*  выпускаемых изделий образует линейную функцию *Ldual(p2)* этих цен:

*Ldual(p2) = p2 1 q 21 + … + p2 n q 2n =* 〈 *p2 , q 2*〉*,*

называемую функцией стоимости ценовой части задачи. Как и всякий доход он стремится быть максимизированным своим получателем, и по этой причине двойственная часть задачи управления состоит в отыскании на множестве допустимых цен изделий их наиболее доходных значений *p2* :

|  |  |
| --- | --- |
| p2 : 〈 p2 , q 2〉 = max 〈 p2 , q 2〉  p2 ⏐ p2 a ≤ p1 | . |

Максимизирующие функцию стоимости задачи допустимые цены изделий называются их равновесными ценами, а сама задача - двойственной или ценовой частью задачи равновесного управления.

**4.Правила двойственного соответствия.** Итак, для одной и той же задачи затрат:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *q 1* |  |  |
| *p2* | *a* | *q 2* | *,* |
|  | *p1* |  |  |

мы получили ее прямую и двойственную части:

*q 1 : min* 〈*p1 , q 1*〉 при  *a q 1 ≥ q 2*

и

*p2 : max* 〈*p2 , q 2*〉 при *p2 a ≤ p1 .*

Обе они, несмотря на различные "сопряженные" наборы искомых неизвестных: в одной *q 1,* а в другой *p2 ,-* объединены одними и теми же наборами параметров *a, q 2* и *p1* и обладают определенной двойственной симметрией, позволяющей по одной части задачи востановить ей двойственную часть и наоборот.

Действительно, сравнивая между собой обе подзадачи, мы можем установить правила соответствия между ними. Эти правила состоят в замене

1) знака ограничений с ≥ на ≤ ,

2) действия оптимизации функции стоимости c *min* на *max ,*

3) параметров ограничений на параметры функции стоимости c *q 2* на *p1 ,*

4) количественных переменных на им сопряженные ценовые: c *q 1* на *p2 ,* и наоборот,

и позволяют по известной одной части задачи тут же написать ей двойственную.

Заметим , также, что "сопряженные" количественные *q1* и ценовые *p2* переменные обеих подзадач относительно количеств товаров имеют взаимно обратные количественные размерности *штук* и *обратных штук* товара:

*[ q 1k ] = штуки* и *[ p2 l] = рубли / штуки,*

и их балансовые соотношения взаимно обратны в том смысле, что в прямых - количества сырья преобразуются в количества изделия, а в двойственных - наоборот: цены изделий преобразуются в цены сырья:

*q 2 = a q 1* и *p2 a = p1 .*

**5.Транспонирование.** Соблюдаемое нами во взаимно двойственных подзадачах различение строчных и столбцовых векторов устраняется действием транспонирования. Транспонированием матрицы называется действие замены ее строк столбцами или, что то же самое,- столбцов строками, и обычно обозначается значком “*t”* сверху:

| *а t =* | *a1 1* … *a1 m*  … … …  *an1* … *an m* | *t*  ≡ | *a1 1* … *an 1*  … … …  *a1 m* … *an m* | . |
| --- | --- | --- | --- | --- |

В частности:

| *(q 1) t =* | *q 11*  …  *q 1m* | *t*  = ( *q 11 … q 1m*) и *(p1) t=* ( *p1 1 … p1 m*) *t* = | *p1 1*  …  *p1 m* | . |
| --- | --- | --- | --- | --- |

Транспонирование произведения матриц доопределяется произведением транспонированных матриц, взятых в обратном порядке:

*(a c )t = (c )t (a )t;*

в частности:

*( p2 a ) t = a t (p2) t* и *(a q 1) t = (q 1) t a t ,*

а также

*(*〈*p1 , q 1*〉*)**t =* 〈*(q 1) t, (p1) t*〉 *.*

Теперь, двойственная часть задачи равновесного управления, полученная нами в строчных векторах *p1* и *p2* с умножением на матрицу *a* справа:

*p2 : max* 〈*p2 , q 2*〉 при *p2 a ≤ p1 ,*

в транспонированном виде записывается подобно своей прямой части

*q 1 : min* 〈*p1 , q 1*〉 при  *a q 1 ≥ q 2*

в столбцовых векторах *(p1)t* и *(p2)t* с умножением на транспонированную матрицу *at*  слева:

*(p2 )t : max* 〈*(q 2)t, (p2)t*〉 при *a t (p2) t* *≤ (p1 )t.*

### 1.3. Задача выпуска

**1.Табличное представление.** Задача выпуска является "обратной" по отношению к предыдущей задаче затрат задачей равновесного производственного управления. Процессом производства в ней является процесс сборки ряда взаимозаменяемых сложных изделий из нескольких видов простого сырья. Примерами задачи выпуска являются задачи оптимального планирования сборки изделий из нескольких видов комплектующих узлов, в частности:

- строительства из нескольких видов строительных материалов

- времени работы нескольких видов промышленного оборудования,

- времени работы рабочих нескольких специальностей,

и им подобные задачи.

При использовании *m* видов сырья для производства *n* видов изделий во всех задачах выпуска процесс производства описывается матрицей затрат *c,* составляющие которой

*ci j [количество i-сырья / на единицу j-изделия] ≥ 0 ,*

имеют обратные количественные размерности по отношению к количественным размерностям матрицы выпуска *a :*  *[ aj i] = количество j-изделий / на единицу i-сырья.*

В условиях заданного вектора предложения сырья *q1*  и заданных цен *p2*  на производимые изделия в количественной (прямой) части обратной задачи ищется наиболее доходное предложение (план производства) изделий *q2* , а в ценовой (двойственной) части - наименее расходные цены *p1*  потребляемого сырья:

|  | *q 21* … *q 2n* |  |
| --- | --- | --- |
| *p1 1*  …  *p1 m* | *c1 1* … *c1 n*  … … …  *cm1* … *cm n* | *q 11*  …  *q 1m* |
|  | *p21* … *p2 n* |  |

Формальным отличием приведенной таблицы от таблицы предыдущей задачи является, как мы видим, замена сырьевых переменных "издельными" и наоборот.

**2.Количественная часть задачи выпуска.** В условиях затрат *cij* единиц *i-*сырья на каждую единицу производимого *j-*изделия, на выпуск *q21 , … , q2n*  единиц изделий всех *n*  видов потребуется *q11 , … , q1m :*

*q 11 = c1 1 q 21 + … + c1 n q 2n* ≡〈*c1 , q 2*〉 *;*

*. . .*

*q 1m = cm 1 q 21 + … + cm n q 2n* ≡〈*cm , q 2*〉 *,*

единиц сырья каждого вида. *n-*мерные строки матрицы затрат, служащие коэффициентами балансовых соотношений:

*c1 = ( c1 1 … c1 n );*

*. . .*

*cm = ( cm 1 … cm n ),*

есть векторы затрат сырья каждого вида на весь ассортимент производимых из него изделий. Матричное представление полученных балансовых соотношений:

*q 1 = q 1(q 2) = c q 2 ,*

описывает линейный процесс пересчета предложения выпускаемых изделий в спрос на потребляемое для их производства сырье.

Допустимым является такое предложение изделий, при котором спрос на потребляемое сырье не превосходит его предложения:

*q 1 = c q 2 ≤ q 1.*

Доход такого производства, выражаемый стоимостью *M(q2)* продаваемых по ценам *p2*  предлагаемых количеств изделий:

*M(q 2) = p2 1 q 21 + … + p2 n q 2n* ≡〈*p2 , q 2*〉 *,*

называется функцией стоимости количественной части обратной задачи. Сама же задача состоит в том, чтобы на множестве ее допустимых планов производства найти план наибольшей стоимости:

|  |  |
| --- | --- |
| *q 2 :* 〈 *p2 , q 2*〉 *= max* 〈 *p2 , q 2*〉  *q 2* ⏐ *c q 2 ≤ q 1* | *.* |

В сущности, все задачи равновесного управления являются определениями равновесных значений своих искомых неизвестных.

**3.Ценовая часть задачи выпуска.** Одновременно, затраты на каждую единицу *j-*изделия *cij* единиц сырья всех *m* видов по ценам *p1i: i=1, … , m,* сообщают выпускаемым изделиям цены *p21 , … , p2n :*

*p2 1 = p1 1 c1 1 + … + p1 m cm 1* ≡ 〈*p1 , d 1*〉 *;*

*. . .*

*p2 n = p1 1 c1 n + … + p1 m cm n* ≡ 〈*p1 , d n*〉 *.*

*m-*мерные столбцовые векторы матрицы затрат:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *d 1* ≡ | *c1 1*  *…*  *cm 1* | *, … , d n* ≡ | *c1 n*  *…*  *cm n* | *,* |

есть векторы затрат сырья на выпуск изделия каждого вида. Ценовые балансовые соотношения

*p2 = p2(p1) = p1 c*

описывают осуществляемое матрицей затрат двойственное линейное преобразование цен потребляемого сырья в цены производимых из них изделий.

При заданных продажных ценах изделий вложенное в них сырье приобретает ценность, не меньшую ценности выпускаемых из него изделий:

*p2 = p1 c ≥ p2 .*

Как и в задаче затрат полученные ценовые условия равновесия выражают необходимое условие продаж: покупка готовых изделий не должна быть дороже их самостоятельного изготовления.

Стоимость расходуемого сырья:

*Mdual(p1) = p1 1 q 11 + … + p1 m q 1m* ≡ 〈*p1 , q 1*〉 *,*

составляет расход производства. Ищутся допустимые цены сырья, сообщающие его стоимости наименьшее значение:

|  |
| --- |
| *p1 :* 〈 *p1 , q 1*〉 ≡ *min* 〈 *p1 , q 1*〉  *p1* ⏐ *p1 c ≥ p2 .* |

**4.Каноническая пара задач.** Итак, мы описали все четыре линейные статические задачи равновесного производственного управления:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *q 1* |  |  |
| - пару задач затрат: | *p2* | *a* | *q 2* | *:* |
|  |  | *p1* |  |  |

с прямой задачей оптимального планирования закупок сырья:

*q 1 : min* 〈*p1 , q 1*〉 при  *a q 1 ≥ q 2 ,*

и двойственной ей задачей оптимального планирования цен выпускаемых изделий:

*p2 : max* 〈*p2 , q 2*〉 при *p2 a ≤ p1 ;*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *q 2* |  |  |
| - и пару задач выпуска: | *p1* | *с* | *q 1* | *:* |
|  |  | *p2* |  |  |

с прямой задачей оптимального планирования выпуска изделий:

*q 2 : max* 〈 *p2 , q 2*〉 *при c q 2 ≤ q 1 ,*

и ей двойственной задачей оптимального оценивания сырья:

*p1 : min* 〈 *p1 , q 1*〉 *при p1 c ≥ p2 .*

Как мы видим, обе задачи обладают "перекрестной" симметрией и формально, то есть безотносительно к экономическому содержанию, прямая и обратная пары задач тождественны друг другу с точностью до - 1)- переобозначения своих величин и -2)- перестановки между собой их взаимно-двойственных частей:

*min* 〈 *p1 , q 1*〉 *при a q 1 ≥ q 2 max* 〈 *p2 , q 2*〉 *при c q 2 ≤ q 1,*

*max* 〈 *p2 , q 2*〉 *при p2 a ≤ p1 min* 〈 *p1 , q 1*〉 *при p1 c ≥ p2 .*

Точная взаимозаменяемость задач достигается:

- заменой технологических матриц:

*c ↔ a ,*

- и переобозначением количественных и ценовых векторов:

*(p1; 2 )t ↔ q 1; 2 .*

При этом прямая часть задачи затрат становится равносильной двойственной части задачи выпуска, а двойственная часть первой - прямой части второй.

Будем называть взаимно-двойственную пару задач прямого (затратного) вида с прямой (количественной) частью на минимум и двойственной (ценовой) частью на максимум:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | *q 1* |  |  | *q 1 : min* 〈 *p1 , q 1*〉 *при a q 1 ≥ q 2 ,* |
| *p2* | *a* | *q 2* | : |  |
|  | *p1* |  |  | *p2 : max* 〈 *p2 , q 2*〉 *при p2 a ≤ p1 .* |
|  |  |  |  |  |

- канонической парой линейных задач статического равновесия, а их переменные *q1* и *p2* - канонически сопряженными переменными.

### 1.4. Задача равновесия

**Физическое содержание задачи равновесия.** В трехмерном случае: *m, n ≤ 3,* наша задача имеет простое физическое истолкование. Во внешнем силовом поле постоянной во времени и пространстве напряженности *p1*  скалярная линейная функция координат *L(q 1):*

*L(q 1) =* 〈*p1 , q 1*〉 *,*

является потенциальной энергией находящегося в точке *q1* пробного тела единичной массы (заряда). Все налагаемые на перемещения пробного тела дополнительные ограничения называются в механике связями. Ограничения нашей задачи

*q 1: a q 1 ≥ q 2*

задают в пространстве ее переменной *q 1* выпуклую многогранную область допустимых перемещений. В итоге, каноническая задача оптимального производственного управления:

*q 1: min* 〈 *p1 , q 1*〉 *при a q 1 ≥ q 2 - ?*

- физически представляет собою задачу вычисления в ограниченной области простран­ства координат *q1* точки наименьшей потенциальной энергии *L(q1)* пробного тела единичной массы в постоянном внешнем силовом поле *p1 .*

Точка наименьшей потенциальной энергии называется точкой статического равновесия и задача ее определения - задачей статического равновесия. По этой причине линейную задачу оптимального производственного планирования мы будем называть так, как об этом заявлено в названии, а именно - **линейной задачей статического равновесия**.

Особенностью линейных задач является независимость их свойств от геометричеких размерностей их величин. Это обстоятельство используется для распространения трехмерной терминологии на линейные задачи равновесия любой пространственной размерности.

Возьмем в качестве пробного тела идеальный маленький шарик (то есть шарик, с диаметром, меньшим длины самого короткого ребра допустимой области, без трения покоя перекатывающийся между всеми ее угловыми точками) и поместим его в образуемую системой ограничений выпуклую многогранную область. Основные свойства задачи равновесия становятся физически очевидными свойствами его поведения в этих условиях.

Так, условие невыкатывания шарика из области ограничений под действием приложенной к нему внешней силы является признаком существования решения задачи равновесия. Геометрически он состоит в условии принадлежности вектора силы *p1*  выпуклой оболочке коэффициентных векторов всех ограничений.

Точка равновесия, если она существует, располагается на границе области допустимых перемещений и, более того, - в одной из угловых точек границы.

Выпуклая области имеет выпуклую границу и наоборот. Физически, это обстоятельство равносильно условию свободного перемещения шарика по границе в поисках точки своего равновесия. Способ последовательного приближения к точке равновесия посредством движения по ребрам граничной поверхности называется "симплекс-мето­дом" решения задачи линейного программировани. Задача оптимизации заданной фун­кции на заданной поверхности называется в механике задачей управления.

Грани точки равновесия называются равновесными гранями. В точке равновесия со стороны каждой равновесной грани на шарик действует сила реакции опоры, направленная прямоугольно этой грани вдоль вектора ее нормали. Признак равновесия выражает собою содержание третьего закона Ньютона, по которому в точке равновесия вес пробного тела уравновешивается суммой сил реакций опор. Равновесные цены выпускаемых изделий являются коэффициентами *p2* этого разложения.

Если некоторая грань является равновесной, то она проходит на нулевом расстоянии от точки равновесия и, потому, с ее стороны на шарик действует ненулевая сила реакции опоры; если же грань неравновесна, то она располагается на строго положительном расстоянии от точки равновесия и, потому, сила реакции с ее стороны равняется нулю. В теории задачи равновесия эта пара свойств получила название дополняющей нежесткости.

Отсутствие вырождения в виде прямоугольности вектора напряженности силового поля одной из равновесных граней служит признаком единственности решения задачи равновесия. При непрерывных значениях параметров точная пропорциональность координат вектора *p1* и какого-то вектора *al* нормали грани невероятна и может быть лишь следствием округления численных значений их координат. Такое вырождение задачи называется случайным и легко снимается малыми изменениями или “шевелением” параметров. Отношения, сохраняющиеся при шевелении их параметров, называются случаем общего положения или, по-просту, - общим случаем.

Основная литература

1. Л.В.Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1960

2. Дж.Данциг. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., “Прогресс”, 1966

3. Д.Б.Юдин и Е.Г.Гольштейн. Линейное программирование: теория, методы и приложения. М., “Наука”,1969

4. М.Интрилигатор. Математическкие методы оптимизации и экономическая теория. М., “Прогресс”, 1975