**Федеральное агентство по образованию**

**Пензенский государственный педагогический университет имени В.Г. Белинского**

**Физико-математический факультет**

**Кафедра общей физики**

**Курсовая работа**

**Некоторые приложения дифференциального исчисления**

**Пенза 2008**

**Признаки возрастания и убывания функции**

Функция f(x)*,* заданная на интервале, называется возрастающей,если большим значениям аргумента соответствуют большие значения функций, т.е. если как только x2 > x1 ,так и f(x2)>f(x1). Функция называется убывающей*,* если из x2 > x1 следует f(x2)<f(x1)*.* Возрастающие и убывающие функции носят общее название монотонных функций*.* Функция называется кусочно монотонной*,* если любой конечный интервал, содержащийся в ее области определения, состоит из нескольких интервалов, на каждом из которых функция монотонна (рис. 1).

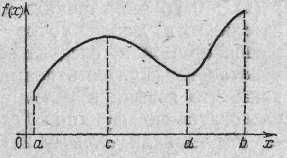


Рис. 1

Основной принцип дифференциального исчисления дает простые признаки возрастания и убывания дифференцируемых (т.е. имеющих производную) функций.

Пусть функция f (х)возрастает на некотором интервале. Тогда ее график представляет собой линию, поднимающуюся при движении слева направо (рис. 2). Поэтому маленький отрезок касательной, почти совпадающий с кусочком графика, примыкающим к точке касания, будет тоже поднимающимся или, в крайнем случае, будет горизонтальным отрезком. Следовательно, угловой коэффициент касательной в любой точке кривой (т.е. значение производной) больше или равен нулю.

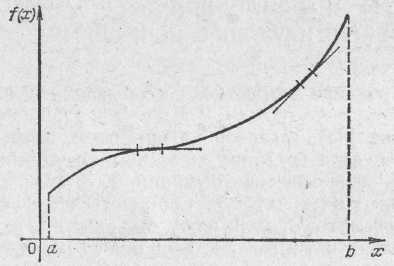


Рис. 2

Справедлива теорема:

Теорема 1. Пусть функция f(x) определена и непрерывна на некотором интервале и внутри него имеет конечную производную . Для того чтобы f(x) была на интервале монотонно возрастающей в широком смысле, необходимо и достаточно условие



Необходимость. Если f(x) монотонно возрастает, то, взяв х из промeжутка и придав ему приращение  будем иметь:

, 

и в пределе, при : 

Достаточность. Пусть дано, что внутри промежутка.Возьмем два значения x1 и x2 () из промежутка и к функции f(x)в промежутке [] применим формулу Лагранжа:



где (x1<c<x2). Так как , то , то есть функция f(x) – возрастающая. Теорема доказана.

Для убывания функций имеются признаки, которые аналогичны признакам возрастания.

Теорема 2. Пусть функция f(x) определена и непрерывна на некотором интервале и внутри него имеет конечную производную . Для того чтобы f(x) была на интервале монотонно убывающей в широком смысле, необходимо и достаточно условие



Связь между знаком производной и направлением изменения функции геометрически очевидна, так как производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции. Знак этого угловогПримеры

1. Функция f(x)=x3. Она возрастает, но её производная  при x=0 обращается в 0.
2. Для возрастающей функции производная может даже в конечном промежутке обращаться в 0 бесконечное множество раз. Рассмотрим функцию

, для x>0

, таким образом функция непрерывна и при x=0. Для x>0:



Эта производная обращается в 0 при (k=0,1,2,…). При этом  при 

Следовательно, 

1. Найти промежутки монотонности функции используя достаточные условия возрастания и убывания функции на интервале.

Находим производную



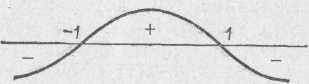


Рис. 3

На рисунке 3 показано распределение знаков производной по числовой оси. Применяя достаточные условия монотонности функции на интервале получаем, что у(х*)* возрастает на [-1; 1], убывает на (; -1] и на [1;). Обратите внимание на то, что концы интервалов (точки х *=*-1 и х=1*)* включаются как в интервал, на котором функция убывает, так и в интервал, на котором функция возрастает.

Замечание. При решении задач практического содержания часто можно не проверять аналитически достаточность условийэкстремума (с помощью первой или второй производной коэффициента показывает, наклонена ли касательная вверх или вниз, а с нею - идет ли вверх или вниз и сама кривая.

Но в отдельных точках касательная при этом может оказаться и горизонтальной, т.е. производная - даже в строгом смысле - возрастающей (убывающей) функции может для отдельных значений хобращаться в 0.

Не каждая стационарная точка доставляет функции экстремум: необходимое условие не является достаточным. Например, для функции производная обращается в нуль при x=0, но в этой точке функция не имеет экстремума: она всё время возрастает.

Если точка - стационарная точка для функции *f(x)* или если в этой точке не существует для нее двусторонней конечной производной, то точка *х0* является лишь «подозрительной» по экстремуму и подлежит проверке достаточных условий для существования экстремума. Предположим, что для функции f(x) в промежутке (a.b) существует конечная производная. Если в точке x0 функция имеет экстремум, то применив к промежутку теорему Ферма (пусть функция f(x) определена в некотором промежутке и во внутренней точке с этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует двусторонняя конечная производная в этой точке, то необходимо ), получим, что : в этом состоит необходимое условие экстремума. Экстремум нужно искать только в тех случаях, где производная равна 0. Эти точки называются стационарными.

На рис. 4 точка *х0* - точка локального минимума функции f(x), x1 есть точка локального максимума. Глобальные минимум и максимум достигаются на концах а и b промежутка задания функции.

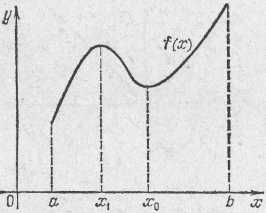


Рис. 4

Максимум и минимум функции носят общее название экстремумов, и точки, в которых они достигаются, называются точками экстремумов.

Рассмотрим задачу, в которой нужно найти все значения аргумента, доставляющих функции экстремум.

Точка локального максимума - точка х0, для которой f(x0) - наибольшее среди всех значений в некоторой окрестности точки х0. Локальный максимум функции - значение f(x0) в точке локального максимума, глобальный максимум - наибольшее значение функции, заданной на интервале. Точка *х0* называется точкой локального минимумадля функции f(x),если ее значение f(x0)в этой точке меньше всех значений в некоторой ее окрестности , то есть . Значение f(x0)называется локальным минимумомфункции *f(x).* Глобальным (всеобщим) минимумомназывается значение функции, наименьшее среди значений на всем интервале.

**Максимум и минимум функций**

Если функция f(x),определенная и непрерывная в промежутке [а, b],не является в нем монотонной, то найдутся такие части промежутка [а, b]*,* в которых наибольшее или наименьшее значение достигается функцией во внутренней точке.

Точка *х0* называется точкой локального минимумадля функции f(x),если ее значение f(x0)в этой точке меньше всех значений в некоторой ее окрестности , то есть . Значение f(x0)называется локальным минимумомфункции *f(x).* Глобальным (всеобщим) минимумомназывается значение функции, наименьшее среди значений на всем интервале.

Точка локального максимума - точка х0, для которой f(x0) - наибольшее среди всех значений в некоторой окрестности точки х0. Локальный максимум функции - значение f(x0) в точке локального максимума, глобальный максимум - наибольшее значение функции, заданной на интервале.

На рис. 5 точка *х0* - точка локального минимума функции f(x), x1 есть точка локального максимума. Глобальные минимум и максимум достигаются на концах а и b промежутка задания функции.

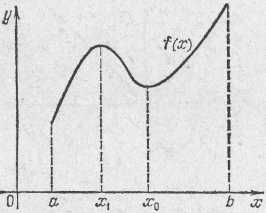


Рис. 5

Максимум и минимум функции носят общее название экстремумов, и точки, в которых они достигаются, называются точками экстремумов.

Рассмотрим задачу, в которой нужно найти все значения аргумента, доставляющих функции экстремум.

Предположим, что для функции f(x) в промежутке (a.b) существует конечная производная. Если в точке x0 функция имеет экстремум, то применив к промежутку теорему Ферма (пусть функция f(x) определена в некотором промежутке и во внутренней точке с этого промежутка принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если существует двусторонняя конечная производная в этой точке, то необходимо ), получим, что : в этом состоит необходимое условие экстремума. Экстремум нужно искать только в тех случаях, где производная равна 0. Эти точки называются стационарными.

Не каждая стационарная точка доставляет функции экстремум: необходимое условие не является достаточным. Например, для функции производная обращается в нуль при x=0, но в этой точке функция не имеет экстремума: она всё время возрастает.

Если точка - стационарная точка для функции *f(x)* или если в этой точке не существует для нее двусторонней конечной производной, то точка *х0* является лишь «подозрительной» по экстремуму и подлежит проверке достаточных условий для существования экстремума.

Первое правило для испытания “подозрительного” значения х0: подставляя в производную  сначала х<х0, а затем x>x0, устанавливаем знак производной вблизи от точки х0 слева и справа от нее; если при этом производная меняет знак плюс на минус, то имеем максимум, если меняет знак минус на плюс, то - минимум; если же знака не меняет, то экстремума нет.

Это правило решает вопрос в том случае, когда в промежутке (а,b), всего лишь конечное число стационарных точек или точек, где отсутствует конечная производная:

 (1)

Тогда в любом промежутке



существует конечная производная  и в каждом таком промежутке сохраняет постоянный знак. Если бы меняла знак, например, в промежутке (xk ,xk+1),то, по теореме Дарбу (Если функция f(x) имеет конечную производную в промежутке [a,b], то функцияпринимает, в качестве значения, каждое промежуточное число между и  ), она обращалась бы в нуль в некоторой точке между xk и xk+1,что невозможно, поскольку все корни производной уже содержатся в ряду точек (1).Последнее замечание применимо в некоторых случаях на практике: знак производной во всем промежутке *(xk,,хk+1)*определится, если вычислить значение (или даже только установить знак) ее в одной какой-либо точке этого промежутка.

При разыскании экстремумов исследование знака производной вблизи испытуемой точки можно заменить исследованием знака второй производной в самой этой точке.

Пусть функция *f(x)* имеет производную *f (x)* в окрестности точки *х0,* и вторую производную в самой точке х0:. Точка х0 - стационарная, т.е.. Если , то функция в точке х = х0 возрастает, т.е. вблизи точки х0 слева , а справа . Таким образом, производная меняет знак минус на плюс и, следовательно, f(x) имеет в точке х=х0 минимум. Если, f"(x0)<0, то в точке х = хо убывает, меняя знак плюс на минус, то имеем максимум.

Второе правило для испытания «подозрительного» значения х0: подставляем х0 во вторую производную :если , то функция имеет минимум, если же f" (х0) < 0, то - максимум.

Это правило имеет ограничение в применении: оно неприложимо к тем точкам, где не существует конечной первой производной; когда вторая производная обращается в нуль, правило также ничего не дает. Решение вопроса зависит тогда от поведения высших производных.

Замечание. При решении задач практического содержания часто можно не проверять аналитически достаточность условий экстремума (с помощью первой или второй производной). Заключение о наличии экстремума обычно легко сделать на основании условий задачи. Это относится также и к отысканию наибольших и наименьших значений.

План решения текстовых задач на экстремум:

1. Выбрать независимую переменную и установить область её применения.
2. Выразить исследуемую величину через аргумент.
3. Найти стационарные точки и точки, в которых исследуемая функция не имеет производной (в частности, точки, где производная обращается в бесконечность). Из числа последних точек исключить точки несуществования функции.
4. Вычислить значения функции в найденных точках и на концах отрезка изменения аргумента и выбрать из этих значений наибольшее или наименьшее.

Примеры.

1. Нужно построить прямоугольную площадку возле каменной стены так, чтобы с трёх сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвёртой стороной примыкала к стене. Для этого имеется a погонных метров сетки. При каком соотношении сторон площадка будет иметь наибольшую площадь?

Решение

Обозначим стороны площадки x и y. Площадь площадки равна S=xy. По условию, данному в задаче, должно выполняться равенство . Поэтому и , где . (Потому что длина и ширина площадки не могут быть отрицательными).

, , , 

Так как , то при  функция S имеет максимум. Значение функции

S =кв. ед.

Так как функция S(x) непрерывна на и её значения на концах S(0) и S() равны нулю, то найденное значение будет наибольшим значением функции. Таким образом, наиболее выгодным соотношением сторон площадки при данных условиях задачи является 

1. В данный шар вписать цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность (рис. 6).

r



R

Рис. 6

Пусть радиус шара R, а радиус основания цилиндра r. Тогда высота цилиндра h определится по формуле  , а боковая поверхность , при этом . Отсюда , при , откуда 

Функция S(r) положительна и непрерывна на . На концах отрезка она равна нулю. Следовательно, внутри отрезка при  она имеет наибольшее значение. Цилиндр такого радиуса будет искомым.

1. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

Решение

Обозначим стороны прямоугольника через x и y. Тогда периметр равен . Выразим y через x, зная, что радиус полукруга R (из прямоугольного треугольника):

, .

Тогда периметр



Находим производную:

, при этом 

 при 





Таким образом, прямоугольник должен иметь стороны ; 

1. Вокруг полушара радиуса описать прямой круговой конус наименьшего объема; при этом предполагается, что основания полушара и конуса лежат в одной плоскости и концентричны (рис. 7).

Решение

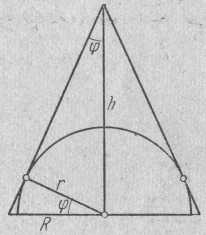


Рис. 7

Обозначим угол при вершине конуса через . Тогда получается:



И объем конуса: 

Для того чтобы объем V имел наименьшее значение, очевидно, нужно, чтобы выражение *у =* cos2sin, стоящее в знаменателе, получило свое наибольшее значение, при изменении  в промежутке . Имеем



между 0 и  производная обращается в нуль при tg = , , меняя при этом знак плюс на минус. Этот угол доставляет выражению y наибольшее значение, а объёму V – наименьшее.

1. Найти для функции  точки максимума, минимума, промежутки возрастания и убывания.

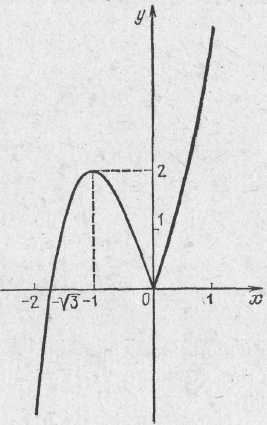


Рис. 8

Решение

Запишем функцию двумя разными формулами для промежутков (;0) и [0; +). На первом промежутке , на втором . При < x < 0 имеем . Производная обращается в нуль при х = 1 и х = -1. Первая из этих точек не принадлежит промежутку (; 0). На промежутке (; - 1) производная положительна, на промежутке (- 1; 0)- отрицательна, поэтому -1 -точка максимума. На промежутке (0; ) производная у'= Зх2 + 3 > 0, значит функция возрастает на промежутке, и точка x = 0, в которой производная от функции  не существует, оказывается точкой минимума. График имеет вид, изображенный на рис. 8.

1. Миноносец стоит на якоре в 9 км. От ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км., считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком по 5 км/ч, а на вёслах 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

Решение

S2

O

A

B

C

S1

Рис. 9

OA=9 км (рис. 9)

OB=15 км

км/ч

5 км/ч

Пусть S1 гонец проплывает со скоростью v1=4 км/ч, а путь S2 гонец проходит со скоростью v2=5 км/ч. Пусть OC=x, тогда  

Тогда исследуемая функция будет выглядеть:



Дифференцируя полученную функцию имеем:



 ;  ;  ; ; 

Получаем x = 12 (км). Знак первой производной для значений, несколько меньших 12 и несколько больших 12 меняется с “-” на ”+”, т.е. функция t при x = 12 имеет минимум. Гонец должен доплыть до пункта C, находящемуся на расстоянии 12 км. от пункта O.

**Производные высших порядков**

Наряду с производной функции f(x) часто возникает потребность в рассмотрении производной  функции . Она называется второй производной функции f(x). Производная есть скорость изменения функции. Поэтому вторая производная есть скорость изменения скорости изменения функции или, вторая производная есть ускорение изменения функции.

Производная от второй производной называется третьей производной или производной третьего порядка; производная от третьей производной - производной четвертого порядка и т.д. Производная порядка п от функции f (х) обозначается f(n) (х).

Первая производная  функции *f(x)* имеет ясный геометрический смысл. Она есть угловой коэффициент касательной, т.е. равна тангенсу угла наклона касательной коси абсцисс (рис. 10).

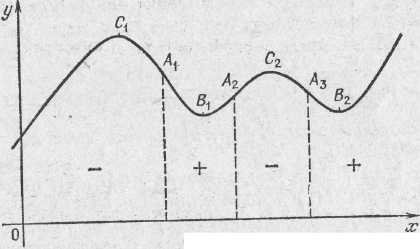


Рис. 10

Вторая производная есть скорость изменения углового коэффициента касательной. Положительность второй производной на некотором интервале означает, что угол, образованный касательной с осью абсцисс, растет с увеличением x. Геометрически это значит, что график направлен выпуклостью вниз. Если же вторая производная отрицательна на некотором интервале, то на нем график расположен выпуклостью вверх. На рис. 4 интервал задания функции разбит на участки, на каждом из которых вторая производная сохраняет знак (этот знак указан на рисунке). Точки, в которых график меняет направление выпуклости, называются точками перегиба. точки А1, А2, А3на рис. 4). При переходе через точку перегиба вторая производная меняет знак.

Наглядно видно, что если в некоторой точке первая производная равна нулю, а вторая положительна (точки В1 и В2 на рис. 4), то в этой точке функция имеет минимум, так как в такой точке касательная к графику горизонтальна и выпуклость направлена вниз. Соответственно если первая производная в точке равна нулю, а вторая отрицательна, то в этой точке имеет место максимум (точки С1 и С2 на рис. 4).

Если = 0 и , то функция f(x) достигает в точке х0 минимума; если же = 0 и f"(x0)<0, то функция имеет в этой точке максимум. Рассмотрим случай, когда и = 0 и f//(х0) = 0,

Предположим, что функция f(x) имеет в точке х =x0 n последовательных производных, причем все они, вплоть до (n-1) в этой точке обращаются в нуль:



но . Разложим приращение f{x)-f(x0) функции f(x) по степеням разности х - х0 по формуле Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано**.**

****

Так к все производные порядков меньших, чем n, равны в точке х0 нулю, то



Так как  при , при достаточной близости x к х0 знак суммы в числителе будет совпадать со знаком f{n) (x0) как для х<х0, так и для x>x0. Рассмотрим два случая:

1) n - нечетное число: n = 2k+1. При переходе от значений x к x0, меньших, чем х0, к значениям, большим, чем х0, выражение (х – х0)n изменит знак на обратный, а так как знак первого множителя при этом не меняется, то и знак разнести f(x)-f(x0) изменится. Таким образом, в точке х0 функция f(x) не может иметь экстремума, потому что вблизи этой точки принимает значения как меньше, так и большие, чем f(х0).

2) n - четное число: n = 2k. В этом случае разность f(x) – f(x0) не меняет знака при переходе от х меньших, чем х0, к большим, так как (х – х0)n>0 при всех х. Очевидно, вблизи х0 как слева, так и справа знак разнести f(x)-f(х0) совпадает со знаком числа f{n) (х0). Значит, если , то f(x)>f(x0) вблизи точки х0, и в точке х0 функция f(x) имеет минимум; если же f{n)(х0)<0, то функция имеет максим.

Теорема.Пусть функция f(x), заданная на интервале [а, b], имеет производные  и в некоторой точке [а,b] имеет место f'{c)=...

Тогда если f(n){x) > 0 при всех х[а, b], то при четном n функция f(x) имеет минимум при х = с, если же  нечетно, то функция f(x) возрастает на [а, b] и для нее х = с-точка перегиба. Соответственно если f(n)(x)<0 при всех х[а, b], то при четном n функция f(x) имеет максимум в точке х = с, а при нечетном функция f(x) убывает на [а, b] и для нее х = с-точка перегиба.

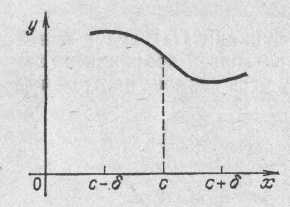


Рис. 11

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены и f(n) (х) > 0 (рис. 5). Тогда f{n-1)(x) возрастает в интервале [а, b], так что при х < с будет  (рис. 11) и при х >c:  (рис. 12).

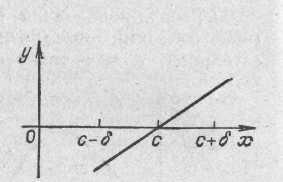


Рис. 12

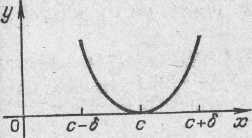
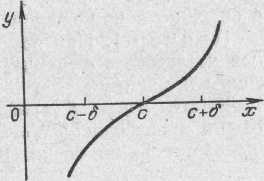


Рис. 13 Рис. 14

Таким образом, f{n-l)(x) отрицательна при х<c и f(n-1)(x) положительна при x>с. Следовательно, f{n-2)(x) убывает слева от точки *х = с* и возрастает справа от точки *х = с.* Она обращается в нуль при х = с.

Поэтому она принимает положительные значения как слева, так и справа от точки х = с и имеет минимум при х = с (рис. 13). Функция f{n-3) (х) возрастает слева и справа от точки x= с, так что, обращаясь в нуль при х = с, переходит от отрицательных значений к положительным (рис. 14). Функция f(n-4) (х) убывает слева отточки х = с и возрастает справа. Следовательно, она имеет минимум и равна нулю при х = с и принимает положительные значения как слева, так и справа от с. Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим, что f{n-1)(x), f(n-3)(x). f(n-5) (x)…. возрастают, когда х проходит через точку х = с, a f(n-2)(x), f{n-4) (x), f(n-6) (x)…. имеют минимум при х = с. При четном n дойдем до исходной функции f (х) через четное число шагов, делаем вывод, что f (x) имеет минимум при х = с. При нечетном n мы дойдем до f(x) за нечетное число шагов и заключим, что f (x) возрастает слева от точки х = с и продолжает возрастать справа от нее. f" (x) тоже возрастает, проходя через нулевое значение, и, следовательно, f" (х) меняет знак с минуса на плюс, значит, точка с есть точка перегиба для функции f(x).

Случай f{n) (x) < 0 рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Если функция задана параметрические: и , то производные  вычисляются по формулам:

; ; ,….

Производную второго порядка можно вычислить по формуле:



Примеры

1) . Найти 





2) Найти , , если 





3) При помощи производных высших порядков исследовать функцию f(х) = х5-2x4 + х3 + 2 на максимум и минимум (рис. 15).

Решение.

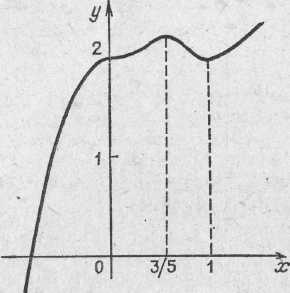


Рис. 15

(x)== 5x4 – 8x3 + 3x2 = x2(5х2-8x+3). Корни производной: х1 = 0; х2 = 3/5; х3=1. Имеются три «подозрительные» точки. Вторая производная

f" (x) = 20x3 - 24x2 + 6x, = 0;



Точка x = 3/5 есть точка максимума, х = 1 - точка минимума. Далее: f"' (х) = 60х2-48х+6; f'" (0) = 6 > 0.

Следовательно, точка х = 0 есть точка перегиба на возрастании. График имеет вид, представленный на рис. 15.

**Формулы Тейлора и Маклорена**

Для функции f(х), имеющей n+1 непрерывных производных в окрестности точки *х* = а, всегда можно найти многочлен Рn(х) степени n такой, чтобы он имел порядок близости к f (х) не менее n+1 в окрестности точки х = а. Докажем это.

Пусть Рn (х) == а0 + а1х + а2х2 + ... + аnхn, есть целый многочлен степени n. Запишем х = (х-а) + а и преобразуем степени х по формуле бинома Ньютона. Каждое слагаемое akxk представится в виде суммы степеней двучлена (х-а) с некоторыми коэффициентами. Соединив подобные члены, представим Рn(х) в виде

Pn(x) = b0 + bl{x-a) + b2(x-a)2+…+bn{x-a)n.

В этой форме будем искать Рn{х).

Пусть rn(х) = f (х)-Рn(х)=f(х)-b0-b1(х-а) - b2(х-а)2-….- bk(x-a)k- ... – bn(x - a)n. Необходимо, чтобы

rn(а) = r'n(а)= ...=r(n)(a)=0. Вычислим производные от функции rn(х):









Приравняв к нулю получим:

f(a)-b0=0; ;….,откуда

b0=f(a), 

При таком выборе коэффициентов функция rn(x) будет иметь порядок малости не меньше n+1 и соответственно Р(х) будет иметь порядок близости к f(x) не меньше n+1.

Итак,



Полученная формула-формула Тейлора. rn(x)-функция, имеющая порядок малости не меньше п+1 в окрестности точки х = а.

В частном случае, при а = 0, формула имеет вид:



Эта формула называется формулой Маклорена.

Примеры

1) Разложить многочлен

Р (х) = х5 -2х4 + Зх3 – x2 + х - 1

по степеням двучлена (х-1).

Найдем все производные от Р (х) до 5-го порядка включительно:

Р'(х) =5х4 - 8х3 + 9х2 - 2х +1, Р" (х) = 20x3 – 24x2 + 18x - 2, Р'"(x) = 60x2 – 48x+18, Р(4)(х)=120х - 48, P(5)(x)=120.

Вычислим значения многочлена и его производных в точке х=1 и подставляем в формулу Тейлора:



В итоге: 

2) Разложить функцию  = ех по формуле Маклорена.

Решение.

Так как f(n)(x) = ex при любом n, то , и по формуле Маклорена получается:



При х=1 получается формула для приближенного вычисления числа е:



Погрешность вычислений оценивается так:

**Применение дифференциалов при оценке погрешностей**

Особенно удобно и естественно использовать понятие дифференциала в приближенных вычислениях при оценке погрешностей. Пусть, например, величину *х* мы измеряем или вычисляем непосредственно, а зависящую от нее величину *у* определяем по формуле: *y=f(x).* При измерении величины *х* обыкновенно вкрадывается погрешность, х, которая влечет за собою погрешность *у* для величины *у.* Ввиду малой величины этих погрешностей, полагаем.



т.е. заменяют приращение дифференциалом.

Теорема**.** Абсолютная погрешность при вычислении значения функции y = f{x) от приближенно заданного аргумента приближенно равна произведению абсолютной погрешности аргумента на значение производной  в рассматриваемой точке.

Доказательство. Пусть х0 - приближенное значение аргумента и х-неизвестное точное значение аргумента, заведомо близкое к х0. Величину х = х-х0 абсолютной погрешности аргумента можно принять за малые приращения аргумента. Соответствующее приращение y = f(x)- f(x0) функции, т.е. абсолютная погрешность для значения функции, приблизительно равна дифференциалу dy = f' (x0)х - f(х0)(х-х0). Что и требовалось доказать.

Из теоремы следует, что оценка абсолютной погрешности значения функции не превосходит оценки абсолютной погрешности аргумента, умноженной на модуль значения производной.

Для относительной погрешности получается формула



Теорема**.** Оценка абсолютной погрешности алгебраической суммы двух функций не превосходит суммы оценок погрешностей слагаемых*.*

Теорема**.** Оценка относительной погрешности произведения и частного двух функций равна сумме оценок относительных погрешностей сомножителей и соответственно делимого и делителя.

Доказательство. Вычисляя для функций y =  и z = абсолютные погрешности как дифференциалы, получается

. Откуда



Переходя к оценкам модулей, получим требуемое.

Пример



Найти приближенные значения для *у* и оценить погрешность.

Решение.

Начнем с оценки погрешности. Имеем

,

откуда

 и



**Приложения дифференциального исчисления к геометрии**

Аналитическое представление кривых.

1) Кривые на плоскости (в прямоугольных координатах).

Уравнение вида

*у=f(х)* или *x = g(y)*, (1)

есть способ задания кривой, когда одна из текущих координат ее точки представляется в виде (однозначной) явной функции от другой координаты, это явное задание (или представление) кривой. Всякое другое задание может быть сведено к этому*.*

Также существует неявное задание кривой, т.е. о представлении кривой уравнением вида

*F{x,y) = 0,* (2)

неразрешенным ни относительно *х,* ни относительно *у*.Такое уравнение носит название неявного уравнения кривой.

Если в точке *(х0, у0)* кривой выполнено условие

 или 

то, по крайней мере, в некоторой окрестности этой точки кривая может быть представлена явным уравнением (1) того или другого вида (причем фигурирующая в нем функция / или *g* непрерывна вместе со своей производной).

Таким образом, только точки *(х0,* \_у0) кривой, для которых выполняются сразу оба условия

,  (3)

могут иметь ту особенность, что в их окрестности кривая не представима явным уравнением (ни того, ни другого вида). Точки кривой, удовлетворяющие уравнениям (3), и называют особыми.

Уравнения вида

**, (4)

устанавливающие зависимость текущих координат точки от некоторого параметра *t,* также определяют кривую на плоскости. Уравнения называются параметрическими; они дают параметрическое представление кривой.

Кривая есть геометрическое место точек, удовлетворяющих аналитическому соотношению вида (1), (2) или (3).

2) Кривые на плоскости (в полярных координатах).

Во многих случаях оказывается проще представлять кривые их полярными уравнениями, устанавливающими зависимость между текущими полярными координатами r,  точек кривой. Зависимость между r и может быть задана в явной, неявной или параметрической форме. Вид явного уравнения:

Если перейти к прямоугольным координатам, взяв полюс за начало, а полярную ось - за ось *х,* то уравнения

*x = r* cos =f() cos, у=rsin=f()sin

дадут параметрическое представление нашей кривой, причем роль параметра здесь будет играть полярный угол.

Формулы: 

Показывают, что особая точка может встретится лишь в том случае, если 

**Длина плоской кривой**

Пусть имеем (незамкнутую или замкнутую) плоскую кривую *АВ,* заданную параметрически уравнениями:

,

где функции  и  здесь предполагаются непрерывными. Пусть кратных точек на кривой нет, так что каждая точка получается лишь при одном значении параметра *t*. При этих предположениях кривую будем называть непрерывной простой кривой.

Точка А отвечает значению параметра t=t0, а точка B-значению t=T. Точка А называется начальной, а точка B конечной точкой кривой. Из двух отличных от A и B та считается следующей, которая отвечает большему значению параметра.

Возьмем на кривой ряд точек: А = М0, М1 ,М2 ,..., Мi ,Mi+1,…, Мn = В так, чтобы они шли в указанном возрастающим значениям параметра t0 <t1<t2<…<ti<ti+1<…<tn.

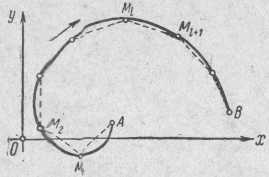


Рис. 16

Соединяя эти точки последовательно прямолинейными отрезками (рис. 16), мы получим ломаную М0М1 ... Мn-1 Мnвписанную в кривую АВ*.*

Длиной кривой АВ, называется точная верхняя граница S для множества периметров р всевозможных вписанных в кривую ломаных: S=Sup{p}.

Если это число S конечно, то кривая называется спрямляемой.

Пусть функции и имеют непрерывные производные и на . Тогда длина дуги вычисляется по формуле  или (1)

Если кривая задана полярным уравнением *r = g(),* то это равносильно заданию ее параметрическими уравнениями

*х = r* cos, *у = r*sin,

где параметр - ; дуга будет функцией от: *s = s().* Так как



То 

и формула (1) примет вид:



Кривизна плоской кривой.

Пусть дана простая кривая *x = (t), y = (t) (t0) ,* (1)

где функции  и  предполагаются непрерывными вместе со своими производными первого и второго порядка.

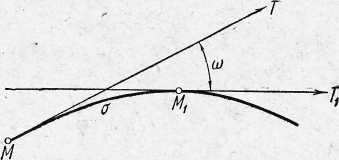


Рис. 17

Пусть , есть дуга кривой; рассмотрим касательные МТ и M1T1 проведенные в конечных точках этой дуги. Кривизну кривой будем характеризовать углом поворота касательной, рассчитанным на единицу длины дуги, т.е. отношением , где угол измеряется в радианах, а длина - в выбранных единицах длины. Это отношение называют средней кривизной дуги кривой*.*

Кривизной кривой в точке М называется предел, к которому стремится средняя кривизна дуги MM1 ,когда точка М1 вдоль по кривой стремится к М.

Кривизну кривой в данной точке обозначаем буквой *k:*



Возьмем на участке кривой точку *М*, и пусть ей отвечает значение s дуги. Придав *s* произвольное приращение , получим другую точку (рис. 18). Приращение угла наклона касательной при переходе от *М* к *М1* даст угол между обеими касательными: 

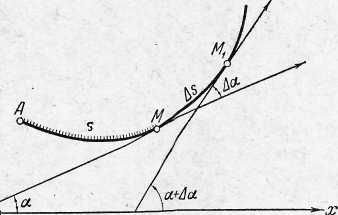


Рис. 18

Так как, то средняя кривизна будет равна 

Устремив *MM1* = к нулю, получим выражение для кривизны кривой в точке *М:*

 (2)

Перепишем формулу (2) иначе:

 (3)

. Нужно найти . Так как

 и , то



Подставив в (3) значения и получим конечную формулу:

 (4)

Если кривая задана явным уравнением *y=f(x),* то эта формула принимает вид:



Если дано полярное уравнение кривой: r = g(), то можно перейти к параметрическому представлению в прямоугольных координатах, принимая за параметр . Тогда с помощью (4) получается:



Пример.

Найти кривизну линии в точке с абсциссой 

Решение

Находим 

Вычисляем значения производных при :

; 

Кривизна линии 

**Литература**

1. Д.К. Фаддеев, Н.С. Никулин, И.Ф. Соколовский Элементы высшей математики для школьников. - М.: Наука,1987. - 336 с.
2. Н.Я. Виленкин, К.А. Бохан и др. Задачник по курсу математического анализа. - М.,”Просвещение”,1981. – 343 с.
3. Г.М. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1969.
4. П.Е. Данко и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. - Издательство “Высшая школа”, 1998.