**Новый глобальный фрактальный формализм описывает различные сценарии перехода к хаосу**

Б. Г. Леви

Одним из стимулов интенсивного исследования нелинейных физических систем была надежда на то, что, несмотря на свою сложную структуру, они всё же обладают некоторыми универсальными характеристиками, общими для целых классов сходных нелинейных процессов. Наиболее поразительное воплощение эта надежда получила несколько лет назад, когда Митчелл Фейгенбаум (работавший тогда в Лос-Аламосе, а позднее перешедший в Корнеллский университет) обнаружил, что небольшое число универсальных (не зависящих от конкретных деталей динамики) отношений характеризует все системы, претерпевающие при переходе к турбулентности бесконечную последовательность удвоений периода [1]. При этом система Фейгенбаума входит в сложный режим, в котором удаётся выявить масштабно-инвариантную, или фрактальную, структуру. Недавно группа теоретиков разработала метод, позволяющий описывать новую глобальную структуру таких фрактальных объектов. Предсказания, сделанные на основе предложенного формализма, хорошо согласуются с результатами измерений, произведённых в Чикагском университете в экспериментах над жидкостью, переходящей к хаосу по двум различным сценариям.

Теоретический подход. Формализм был разработан [1] Томасом Ч. Хелси, Могенсом X. Иенсеном и Лео П. Кадановым (Чикагский университет), Итамаром Прокачча (Институт Вейцмана) и Борисом И. Шрайманом (Лаборатория фирмы «Белл»). Их работу проще всего понять на примере — применительно к той конкретной динамической системе, на которой была произведена экспериментальная проверка теории [2]. В качестве системы была выбрана система Рэлея–Бенара с внешним возбуждением. Измерения проводились в Чикаго Альбертом Либхабером, Джоэлем Стевансом, Джеймсом Глейзьером и Франсуа Эсло.

Их экспериментальная установка состоит из кюветы с ртутью, подогреваемой снизу и охлаждаемой сверху. Когда градиент температуры становится достаточно большим, в жидкости возникают два вихря (конвективных ролика, или вала), вращающихся навстречу друг другу так, что в середине кюветы течение направлено вверх, а у стенок — вниз. При дальнейшем увеличении градиента конвективные ролики начинают осциллировать. Воображаемая линия, проходящая между роликами параллельно их осям, с малой амплитудой колеблется в горизонтальной плоскости. Помимо этих конвективных колебаний с собственной частотой в системе возбуждают колебания другой частоты, обусловленные вынуждающей пондеромоторной силой. Для этого в центральной части кюветы через ртуть (проводящую жидкость) в вертикальном направлении пропускают переменный ток, а в горизонтальном направлении параллельно осям конвективных роликов прилагают постоянное магнитное поле.

Если эти две частоты несоизмеримы, траектория системы в фазовом пространстве лежит на поверхности некоторого тора. Когда амплитуда переменного тока, возрастая, смещает систему к хаотическому, или турбулентному, режиму, этот тор сильно деформируется. Его поперечное сечение плоскостью, построенное по данным экспериментальных измерений вблизи порога, за которым наступает хаос, показано на рис. 1. Это так называемая критическая орбита. Она построена по измерениям температуры системы, производившимся в дискретные моменты времени с интервалом, равным периоду вынуждающей силы.

|  |
| --- |
| Рис. 1. Критическая орбита — это траектория системы в фазовом пространстве в момент перехода системы к хаосу. Изображённая здесь орбита представляет собой сечение деформированного тора плоскостью. Оно было построено по измерениям температуры, произведённым в ртутной ячейке при конвективных и электромагнитных колебаниях [3]. |

Даже бегло взглянув на рисунок, мы видим, что в одни области фазового пространства траектория попадает чаще, чем в другие. Новый формализм предназначен для описания этих вариаций плотности изображающих точек или их скопления в отдельных местах на такой критической орбите (или в других аналогичных структурах, возникающих при других сценариях перехода к хаосу). Прежде всего предлагается формула для вероятности pi того, что на расстоянии от данной точки, не большем l, окажется другая точка:

pi = lα i (l).

Показатель α (так называемый критический показатель) может принимать значения в некотором интервале. Распределение этих значений называется спектром сингулярностей и обозначается f (α). Грубо говоря, функция f (α) показывает, сколько раз встречается каждый критический показатель, т.е. каждый закон подобия; следовательно, f можно представлять себе как своего рода энтропию. Такой подход позволяет описывать критическую орбиту как совокупность взаимосвязанных множеств сингулярностей, каждое из которых характеризуется своим значением показателя α.

Для описания конкретной физической системы с помощью нового формализма нужна модель системы. Некоторые эксперименты над системой Рэлея–Бенара с внешним возбуждением показали, что её критическую орбиту можно удовлетворительно моделировать с помощью нелинейного отображения окружности на себя. Оно имеет вид

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| θn+1 = θn – ω – | α  2π | sin(2πθn). |

Это отображение позволило теоретикам предсказать, что кривая f (α) (спектр сингулярностей f в функции критического показателя α) должна выглядеть как кривая, показанная на рис. 2 справа. Были получены и экспериментальные данные (точки на кривой справа), очень хорошо согласующиеся с предсказанием теории. Спектр, приведённый слева, показывает столь же хорошее согласие между теорией и экспериментом для случая, когда система Рэлея–Бенара с внешним возбуждением переходит к хаосу по сценарию удвоения периода.

|  |
| --- |
| Рис. 2. Спектры сингулярностей f (α) показывают, грубо говоря, как часто встречается данное значение критического показателя α. Правая спектральная кривая соответствует критической орбите, изображённой на рис. 1, для системы Рэлея–Бенара с внешним возбуждением при переходе к хаосу по квазипериодическому сценарию. Левая кривая соответствует переходу системы к хаосу по сценарию удвоения периода. |

Начавшись отчасти с пионерских работ Бенуа Мандельброта (фирма ИБМ) около десяти лет назад, исследования фрактальных систем достигли особого расцвета в последние годы. Основная идея представления глобальной структуры фракталов с помощью описанного выше формализма восходит к работе Уриеля Фриша (Обсерватория в Ницце) и Джорджо Паризи (Римский университет) по развитой турбулентности [4]. Позднее Роберто Бенци (Римский научно-исследовательский центр ИБМ), Джованни Паладин (Римский университет), Паризи и А. Вульпиани (Римский университет) развили те же идеи и применили их к описанию зависимости между величиной скорости в точке (α) и числом точек, в которых скорость равна заданной ( f ) [5]. Холси, Пол Микин (фирма «Дюпон») и Прокачча в дальнейшем использовали тот же подход к исследованию явлений агрегации, но в своей работе не представили f в виде непрерывной функции [6].

Переход к хаосу по квазипериодическому сценарию. Система Рэлея–Бенара с внешним возбуждением относится к классу систем с двумя частотами. Если эти две частоты соизмеримы, то в некотором конечном интервале изменения управляющего параметра (в нашем примере — амплитуды переменного тока) происходит синхронизация и в системе устанавливаются колебания с одной частотой. Такая система может переходить к хаосу по сценарию удвоения периода (с увеличением управляющего параметра период претерпевает последовательность удвоений). Однако этот сценарий не единствен.

Если две частоты несоизмеримы (их отношение называется числом вращения), синхронизация по определению не происходит. Спектр системы в этом случае можно представить в виде суммы линейных комбинаций основных частот, причём по мере перехода системы к хаосу число таких комбинаций возрастает. В этом случае говорят, что система переходит к хаосу по квазипериодическому сценарию. На рис. 2 этому сценарию соответствует кривая, изображённая справа.

Скотт Шенкер (Научно-исследовательский центр корпорации «Ксерокс» в Пало-Альто) впервые проанализировал квазипериодические системы на феноменологическом уровне в 1982 г. Вскоре после него Фейгенбаум, Каданов и Шенкер исследовали квазипериодические системы более подробно. Одновременно с ними такую же работу проделали две группы: Стеллан Остлунн (Пенсильванский университет), Дэвид Рэнд (Уорвик, Великобритания) и Джеймс Сетна, Эрик Сиггиа (оба из Корнеллского университета). Все они моделировали систему с помощью отображения окружности на себя. Как показали эти исследования, переход к хаосу перестаёт зависеть от конкретных деталей динамики, когда число вращения равно (√5 – 1)/2. (Это классическое иррациональное число, возникающее при «золотом сечении» отрезка и носящее название золотого среднего). В этом случае и теоретический анализ, и экспериментальные исследования проводятся особенно просто.

Последующие эксперименты над ячейками Рэлея–Бенара с числом вращения, равным золотому среднему, подтвердили универсальные свойства, предсказанные теорией. В ячейке Рэлея–Бенара с водой Арон Фейн (ныне в ИБМ, Йорктаун-Хайтс), Майк Хойтмейкер и Джерри Голлуб (оба из Хейверфордского колледжа) обнаружили некоторые признаки самоподобия спектра [7], т.е. установили, что распределение пиков в спектре с точностью до преобразования подобия совпадает с предсказанным теорией. Стеванс, Эсло и Либхабер выполнили аналогичный эксперимент [8], но, чтобы повысить чувствительность системы к изменению числа вращения, они заполняли кювету не водой, а ртутью и использовали не тепловое, а электромагнитное возбуждение. Эта группа исследователей также обнаружила регулярность в распределении пиков спектра и, кроме того, измерила универсальный параметр. Как показали эти измерения, критическую орбиту можно описать с помощью отображения окружности на себя.

Новый подход, использующий универсальный формализм, в определённом смысле можно противопоставить подходу Фейгенбаума при исследовании перехода к хаосу по сценарию удвоения периода. Как отмечает Каданов, значительная часть теоретической работы ранее была сосредоточена на детальном анализе характерных точек в фазовом пространстве, между тем как новый формализм приводит к глобальному описанию орбит в фазовом пространстве. Фейгенбаум полагает, что формализм, разработанный Кадановым и его сотрудниками, сосредоточивая внимание на грубой, а не детальной информации о глобальных свойствах, имеет весьма хорошие шансы на экспериментальное подтверждение. Кривую f (α) Фейгенбаум сравнивает с термодинамической функцией, в которой для получения величины, легко измеримой в эксперименте, необходимо просуммировать имеющуюся микроскопическую информацию. Фейгенбаум обращает также внимание на то обстоятельство, что новый подход, представимый с помощью формализма статистической механики, устанавливает некоторые связи между физикой стохастических явлений и более традиционной физикой. Однако сам Фейгенбаум продолжает развивать более традиционные термодинамические соображения.

По мнению Остлунна, новый подход, позволяющий получать феноменологическое описание любого объекта, особенно полезен при описании фракталов с многими критическими показателями. Остлунн считает новый подход дополнительным по отношению к вычислению характерных показателей на основе теории ренормгруппы. В первых работах по новому формализму использовалась не теория ренормгруппы, а выбиралось отображение и анализировались генерируемые этим отображением данные. Позднее, применив ренормгрупповой подход, Каданов, Иенсен и Дэвид Бенсимон (Чикагский университет) получили те же результаты из первых принципов [9].

**Список литературы**

1. Feigenbaum M.J. — J. Stat. Phys., 19, 25 (1978); Phys. Lett., 74A, 375 (1979). [Имеется перевод более ранней работы: УФН, 1983, т. 141, вып. 2, с. 343.]

2. Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. — Phys. Rev., A33, 1411 (1986).

3. Jensen M.H., Kadanoff L.P., Libchaber A., Procaccia I., Stavans J. — Phys. Rev. Lett., 55, 2798 (1985).

4. Frisch U., Parisi G. — In: Turbulence and Predicability of Geophysical Flows and Climate Dynamics (Eds. M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi): New York, North-Holland, 1985.

5. Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A. — J. Phys. A: Gen. Phys., 17, 3521 (1984).

6. Halsey T.C., Meakin P., Procaccia I. — Phys. Rev. Lett., 56, 854 (1986).

7. Fein A., Heutmaker M.S., Gollub J.P. — Phys. Scr., T9, 79 (1985).

8. Stavans J., Heslot F., Libchaber A. — Phys. Rev. Lett., 55, 596 (1985).

9. Bensimon D., Jensen M.H., Kadanoff L.P. — Phys. Rev. A (в печати); Kadanoff L.P. — J. Stat. Phys. (в печати).