**Теорема Эйлера для простых многогранников**

Думаю, что такое многогранник, представляют все. Но все же давайте определим его точнее.

Определение. Многогранником называется тело в пространстве, ограниченное поверхностью, которую образуют многоугольники, при этом выполняются условия:

1. каждая сторона любого многоугольника является стороной другого многоугольника, причем только одного;

2. многоугольники с общей вершиной образуют цепочку, в которой два соседних многоугольника имеют общую сторону.

Многоугольники называются гранями многогранника, их стороны называются ребрами, а вершины — вершинами многогранника.

Многогранник называется выпуклым, если для любых двух точек, которые он содержит, отрезок, соединяющий эти две точки, также целиком принадлежит многограннику.

Многогранник называется простым, если он не имеет дыр. Другими словами, любая замкнутая кривая на поверхности многогранника стягивается в точку, принадлежащую поверхности. При этом в процессе стягивания кривая всегда лежит на поверхности многогранника.

Из выпуклости следует простота, но не наоборот.

Примером простого многогранника является куб. А вот если рассмотреть куб, у которого вырезан еще один куб, размером поменьше, так что оба куба имеют общий центр симметрии, то такой многогранник не будет простым.

Теорема Эйлера устанавливает связь между числом вершин , числом ребер и числом граней простого многогранника. Формула Эйлера весьма красива. Она справедлива также для планарных графов.



Интересно, что Эйлер, опубликовавший свою теорему в 1751 году, переоткрыл то, что в 1639 году практически доказал Декарт. Он доказал, что сумма величин всех углов всех граней многогранника равна и что в то же время она равна , откуда сразу же следует формула Эйлера (надо сказать, что Декарт ее в таком виде не получил).



Теорема Эйлера. Для простого многогранника



Доказательство. Удалим одну из граней многогранника. Теперь деформируем оставшуюся поверхность в плоскую сеть (собственно, это и есть планарный граф), состоящую из точек и кривых. Не умаляя общности, можно считать, что деформированные ребра являются отрезками. При этом число вершин, ребер и граней не изменится, если считать, что внешняя для сети часть плоскости соответствует удаленной грани.

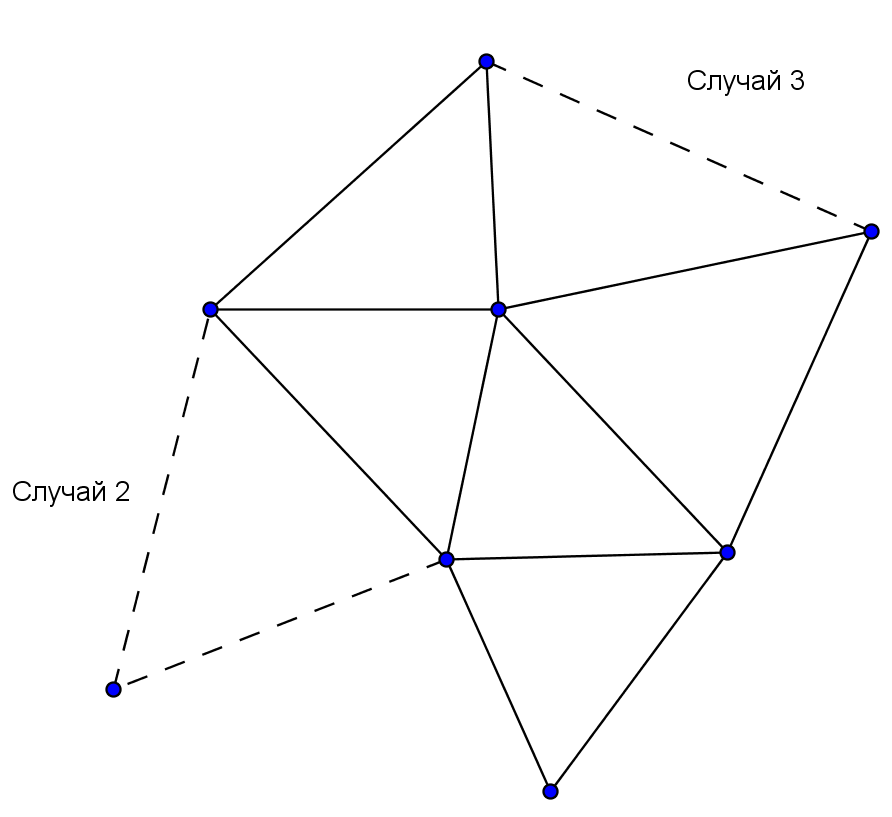
Теперь последовательно применим преобразования, которые будут упрощать полученную сеть, не изменяя эйлеровой характеристики, т.е. числа .



1. Если есть многоугольная грань с более, чем тремя, сторонами, проведем диагональ. Это добавит одно ребро и одну грань. Будем добавлять ребра, пока все грани не станут треугольниками.

2. Будем удалять по одному треугольники, у которых две стороны являются границами с внешней областью. Тем самым, удаляется вершина, два ребра и одна грань.

3. Удалим треугольники, одна сторона которых общая с внешней гранью. Это уменьшает количество ребер и граней на один, при этом число вершин не изменяется.



Будем последовательно применять преобразования 2 и 3 до тех пор, пока не останется один треугольник. Для него (считая внешнюю грань), . Следовательно, , что и доказывает теорему.



Замечание. Приведенное доказательство принадлежит Коши.