***Пошукова робота на тему:***

*Частинні похідні і диференціали вищих порядків.*

**План**

* Частинні похідні вищих порядків
* Теорема про рівність змішаних похідних
* Диференціали вищих порядків

**6.11.Частинні похідні вищих порядків**

Розглянемо функцію двох змінних . Її частинні похідні  і  є функціями змінних  і . Від цих похідних також можна знайти частинні похідні. Їх буде чотири, оскільки від кожної з функцій  і  можна знайти частинні похідні по та по . Назвемо їх частинними похідними другого порядку і позначатимемо:



 - функція  два рази диференціюється по ;



 - функція  диференціюється по , а потім по ;



 - функція  диференціюється по , а потім по ;



 - два рази диференціюється по .



Похідні другого порядку також можна диференціювати по  і . Одержані при цьому похідні називаються частинними похідними третього порядку функції. Їх буде вісім. Аналогічно позначаються похідні більш високих порядків.



Приклад.  Знайти другі частини похідних від функції .



Р о з в ’ я з о к. Знайдемо перші частинні похідні:

;   .



Диференціюємо кожну з них по  і . Одержуємо частинні похідні другого порядку:



.



В розглянутому прикладі

.



Залежність результату диференціювання від порядку диференціювання за різними змінними визначає така теорема.

Теорема. Якщо функція  та її частинні похідні  означені і неперервні в точці  і в деякому її околі, то в цій точці



,



тобто результат диференціювання не залежить від порядку диференціювання за різними змінними.

Доведення теореми опускаємо.

Зауваження. Аналогічна теорема справедлива для будь-якого числа змінних і для похідних більш високих порядків.

Нехай  - диференційована в області  функція двох незалежних змінних  і . В будь-якій точці  цієї області ми можемо обчислити новий диференціал:



.



Будемо називати його диференціалом першого порядку. Він залежить від значень  і , тобто є функцією чотирьох змінних. Закріпивши  і , одержимо функцію двох змінних  і , означену в області .



Диференціал від цієї функції в будь-якій точці  області , якщо він існує, називається диференціалом другого порядку від функції  в точці . Позначається  або .



Отже, за означенням .

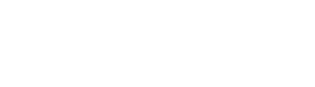
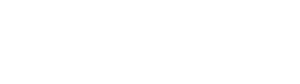


Аналогічно визначаються диференціали третього, четвертого і т. д. порядків. Зокрема,

.



Якщо функція  в області  має неперервні частинні похідні до  - го порядку включно в кожній точці області існують. Обчислимо їх:



тощо.

Введемо символічну  - у степінь : вираз, одержаний в результаті піднесення двочлена, записаного в дужках, у звичайну  - у степінь із подальшою зміною степенів  і , помножених на , частинними похідними відповідного порядку від функції .



Тоді



                                        (6.72)



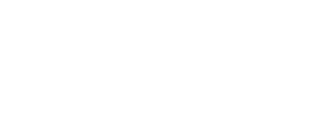
…………………………………………….



Зауваження. Якщо  - диференційована функція проміжних змінних  і , які, в свою чергу, є диференційованими функціями  і , то, обчислюючи ,  і т. д. ,ми уже не одержимо формул (6.78) для обчислення диференціалів.



Так,



Тут   і  - не є постійними (постійні ). Отже, в цьому випадку форма запису другого, третього і т. д. порядків не є інваріантною.

