**Контрольная работа**

**Дисциплина: Высшая математика**

**Тема: Таблица производных. Дифференцирование сложных функций**

**1. Таблица производных**

Как известно, большинство функций можно представить в виде какой-то комбинации элементарных функций. Зная, как дифференцируются элементарные функции, можно продифференцировать и их различные комбинации. Поэтому рассмотрим таблицу производных элементарных функций.

1. .

Найдем производную, когда .

Зададим приращение аргументу , что даст . Так как

, а , то



Отсюда  и ,

то есть . Если , результат тот же.

2. .

Зададим приращение аргументу , что даст . Так как , а , то

.

Отсюда  и , то есть .

3. .

Зададим приращение аргументу , что даст . Так как , а , то

.

Отсюда  и , то есть .

4. .

По определению . Будем дифференцировать  как частное:

, то есть .

5. .

По определению . Будем дифференцировать  как частное:

, то есть .

6. .

Зададим приращение аргументу , что даст . Так как , а , то

.

Отсюда  и

,

то есть . Здесь была использована формула для второго замечательного предела.

7. .

Для вычисления производной воспользуемся предыдущей формулой, в которой положим : . Значит, .

8. .

Зададим приращение аргументу , что даст . Так как , а , то . Отсюда

 и , то есть .

Здесь была использована формула для одного из следствий из второго замечательного предела.

9. .

Для вычисления производной воспользуемся предыдущей формулой, в которой положим : . Значит, .

Прежде чем перейти к вычислению производных от обратных тригонометрических функций, рассмотрим вопрос о дифференцировании обратных функций вообще. Как было сказано в п. 8.2, для каждого взаимно однозначного отображения существует обратное отображение, то есть если , то .

**Теорема**. Если для некоторой функции  существует обратная ей , которая в точке  имеет производную не равную нулю, то в точке  функция  имеет производную  равную , то есть .

Доказательство. Рассмотрим отношение приращения функции к приращению аргумента: . Так как функция  имеет производную, то согласно теореме 11.2.2 она непрерывна, то есть , откуда . Значит, .

Воспользуемся данной теоремой для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

10. .

В данном случае обратной функцией будет . Для нее . Отсюда

,

то есть .

11. .

Так как

, то . .

В данном случае обратной функцией будет . Для нее

.

Отсюда , то есть .

13. .

Так как

, то .

**2. Производная сложной функции**

Пусть дана функция  и при этом . Тогда исходную функцию можно представить в виде . Функции такого типа называются сложными. Например, .

В выражении  аргумент  называется промежуточным аргументом. Установим правило дифференцирования сложных функций, так как они охватывают практически все виды существующих функций.

**Теорема**. Пусть функция  имеет производную в точке , а функция  имеет производную в соответствующей точке . Тогда сложная функция  в точке  также будет иметь производную равную производной функции  по промежуточному аргументу умноженной на производную промежуточного аргумента по , то есть .

Для доказательства дадим приращение аргументу , то есть от  перейдем к . Это вызовет приращение промежуточного аргумента , который от  перейдет к . Но это, в свою очередь, приведет к изменению , который от  перейдет к . Так как согласно условию теоремы функции  и  имеют производные, то в соответствии с теоремой о связи дифференцируемости и непрерывности функции (теорема 11.2.2) они непрерывны. Значит, если , то и , что, в свою очередь, вызовет стремление  к нулю.

Составим . Отсюда,



и, следовательно, .

Если функция  имеет не один, а два промежуточных аргумента, то есть ее можно представить в виде , где , а , или , то, соответственно,  и так далее.

**3. Дифференцирование параметрически заданной функции**

Выше были рассмотрены производные элементарных функций и указано правило дифференцирования сложных функций, составленных из элементарных. Но существуют и другие способы задания функций, которые также необходимо дифференцировать. Одним из таких способов является параметрическое задание функции, с которым мы уже сталкивались при изучении уравнения прямой линии.

При обычном задании функции уравнение связывало между собой две переменных: аргумент и функцию. Задавая , получаем значение , то есть пару чисел, являющихся координатами точки . При изменении  меняется , точка начинает перемещаться и описывать некоторую линию. Однако при задании линии часто бывает удобно переменные  и  связывать не между собой, а выражать их через третью переменную величину.

Пусть даны две функции:  где . Для каждого значения  из данного промежутка будет своя пара чисел  и , которой будет соответствовать точка . Пробегая все значения,  заставляет меняться  и , то есть точка  движется и описывает некоторую кривую. Указанные уравнения называются параметрическим заданием функции, а переменная  – параметром.

Если функция  взаимно однозначная и имеет обратную себе, то можно найти . Подставляя  в , получим , то есть обычную функцию. Указанная операция называется исключением параметра. Однако при параметрическом задании функции эту операцию не всегда делать удобно, а иногда и просто невозможно.

Так, в механике принят способ изображения траектории точки в виде изменения ее проекций по осям  и  в зависимости от времени , то есть в виде параметрически заданной функции  Такой способ значительно удобнее при решении целого ряда задач. В трехмерном случае сюда добавляется еще и уравнение .

В качестве примера рассмотрим несколько параметрически заданных кривых.

1. Окружность.

Возьмем точку  на окружности с радиусом . Выражая  и  через гипотенузу прямоугольного треугольника, получаем:



Это и есть уравнение окружности в параметрической форме (рис. 3.1). Возводя каждое уравнение в квадрат, отсюда легко получить обычное уравнение окружности .



Рис. 3.1

2. Эллипс.

Известно, что уравнение эллипса – . Отсюда . Возьмем две точки  и  на окружности и эллипсе, имеющие одинаковую абсциссу  (рис. 3.2). Тогда из уравнения окружности следует, что . Подставим это выражение в : . Значит, уравнение эллипса в параметрической форме имеет вид





Рис. 3.2

3. Циклоида.

Пусть по ровной горизонтальной поверхности катится без скольжения окружность с радиусом . Зафиксируем точку *O* ее соприкосновения с поверхностью в начальный момент. Когда окружность повернется на угол *t*, точка *O* перейдет в точку *C* (рис. 3.3). Найдем ее координаты:



Значит, параметрическое уравнение циклоиды имеет вид:





Рис. 3.3

4. Астроида.

Пусть внутри окружности радиуса  без скольжения катится другая окружность радиуса . Тогда точка меньшей окружности, которая в начальный момент времени была точкой соприкосновения с большей, в процессе движения опишет астроиду (рис. 3.4), параметрическое уравнение которой имеет вид:





Рис. 3.4

Рассмотрев ряд примеров, перейдем теперь к вопросу о дифференцировании параметрически заданных функций.

Пусть функция  от  задана параметрически:  где . Пусть на этом отрезке обе функции имеют производные и при этом . Найдем .

Составим отношение . Тогда

.

Следовательно, . Это и есть правило дифференцирования параметрически заданных функций.

**Литература**

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В 3-х томах Т. 1 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии 8-е изд. Изд-во: ДРОФА, 2006. – 284с.
2. Мироненко Е.С. Высшая математика. М: Высшая школа, 2002. – 109с.
3. Никольский С.М., Бугров Я.С. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В 3-Х ТОМАХ Т. 2 Дифференциальное и интегральное исчисление 8-е изд. Изд-во: ДРОФА, 2007. – 509с.
4. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. В трех томах. ПОЛИТЕХНИКА, 2003.