Лекция 10

**Комплексные числа и действия над ними**

Рассмотрим уравнение

.

Среди действительных чисел решений данного уравнения нет. По этой причине, в частности, квадратные уравнения имеют решения только тогда, когда дискриминант такого уравнения неотрицателен. Расширим множество действительных чисел, формально добавив к ним число  (мнимую единицу), которая по определению удовлетворяет уравнению . Поскольку мы желаем, чтобы элементы этого расширенного множества можно было бы умножать и складывать, то вместе с мнимой единицей мы автоматически присоединяем к вещественной прямой все возможные комбинации вида

, , .

Совокупность всех чисел  называется множеством комплексных чисел. При этом число  называется вещественной частью комплексного числа  и обозначается как

,

а число  называется мнимой частью комплексного числа  и обозначается как

.

Удобно изображать комплексные числа **** в виде точек двумерной плоскости с декартовыми координатами . В этом случае соответствующая двумерная плоскость называется комплексной.

****

****

****

Операции умножения и деления комплексных чисел.

При умножении комплексных чисел используется обычное соглашение о раскрытии скобок (дистрибутивность умножения):



Пример.

.

При делении следует использовать операцию умножения на сопряженное выражение.

Пример.



Комплексному числу можно приписать понятие *модуля* и аргумента, используя полярные координаты на комплексной плоскости.

Модуль числа  равен .

Аргументом числа  называется полярный угол ,  (аргумент является многозначной функцией).

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

, где .

Теперь умножение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, выполняется по формуле



(то есть при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются).

Следствием формулы умножения является следующая формула.

Формула возведения в степень (формула Муавра)

.

Пример.

, , ,



Формула извлечения корня -й степени

, .

Пример. Вычислить .

Запишем  в тригонометрической форме:

.

Тогда получаем

при 



при 



при 



Таким образом, всего имеется три комплексных кубических корня из числа :, , .

Формула Эйлера

.

Пример использования.

Вычислить .

Воспользуемся формулой Эйлера для выражения функции  через показательную функцию. Имеем:



откуда

 ⇔ .

Следовательно,

,

откуда



.

Первообразная является вещественной функцией, записанной в комплексной форме Чтобы получить вещественную запись этой функции, вновь воспользуемся формулой Эйлера.

,



Отсюда следует



Ответ: .

**Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.**

Рассмотрим уравнение



где  и  константы, а функция  в правой части уравнения имеет один из следующих трех видов

, , ,

 − произвольный многочлен степени . Решение такого уравнения может быть получено следующим образом. Квадратное уравнение



назовем *характеристическим уравнением* для нашего уравнения. Пусть ,  – корни этого квадратного уравнения. Общее решение однородного уравнения



имеет вид

,

если ,  − два различных вещественных числа; имеет вид

,

если  и, наконец, решение имеет вид

,

если ,  − комплексно−сопряженные корни характеристического уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения может быть получено как сумма общего решения однородного уравнения  и произвольного частного решения неоднородного уравнения . Это частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов по следующему правилу.

Сопоставим функции  в правой части исходного уравнения число . Если  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение  ищем в том же виде, в каком записана правая часть, то есть



если , и в виде



если  или . Здесь ,  многочлены степени , коэффициенты которых можно определить, подставив  в исходное уравнение и приравняв коэффициенты при одинаковых функциях. Если  является корнем характеристического уравнения (эта ситуация называется резонансом), то степень многочленов ,  увеличивается на 1.

**Пример.** Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения.



**Решение.** Сначала найдем общее решение однородного уравнения. Выпишем характеристическое уравнение

 ⇔ 

Следовательно, общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

.

Поскольку корни характеристического уравнения не совпадают с соответствующим показателем правой части , частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

.

Получаем:

,

Подставляя , ,  в исходное уравнение, получаем:



Сокращая на  и приводя подобные, получим

,

,

откуда

 ⇔ 

Общее решение неоднородного уравнения имеет, следовательно, вид

.

Теперь найдем решение задачи Коши. Имеем:

,



Поскольку , второе уравнение имеет вид . Решаем систему линейных уравнений на неизвестные  и :



Умножая первое уравнение системы на 2 и вычитая из него второе уравнение, получим:

 ⇔ .

Далее,

.

**Ответ:** .

**Пример.** Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения.

****

**Решение.** Характеристическое уравнение имеет вид:

,

откуда

,

где  − мнимая единица. Следовательно, , , и общее решение однородного уравнения есть

.

Правая часть исходного неоднородного уравнения имеет то же собственное число, что и характеристическое уравнение, следовательно, мы имеем дело с резонансом. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

.

Подставляя  в исходное уравнение, с учетом того, что

,



получим:



откуда



и, следовательно,

, .

Таким образом, частным решением неоднородного уравнения является функция

.

Общее решение неоднородного уравнения может быть записано в виде

.

Найдем константы  и , при которых выполнены краевые условия

, .

Так как

,

получаем систему линейных уравнений на  и :



откуда .