**Содержание**

[Введение 2](#_Toc103987086)

[1. Характеры 3](#_Toc103987087)

1.[1 Определение характера. Основные свойства характеров 3](#_Toc103987088)

1.[2 Суммы характеров. Соотношение ортогональности 6](#_Toc103987089)

1.[3 Характеры Дирихле 8](#_Toc103987090)

[2. L-функция Дирихле 13](#_Toc103987092)

[3. Доказательство теоремы Дирихле 29](#_Toc103987093)

# Введение

Простые числа расположены в натуральном ряде весьма неравномерно.

**Целью** данной работы является доказательство следующей теоремы о простых числах в арифметической прогрессии.

**Теорема Дирихле.** Если разность и первый член арифметической прогрессии есть взаимно простые натуральные числа, то она содержит бесконечное множество простых чисел.

Пусть

*mn + l, n=*1,2, …,

прогрессия, удовлетворяющая условию теоремы.

Условие (*m, l*)=1, наложенные на числа m и e в формулировке теоремы, естественно, поскольку в случае, когда *d*=(*m, l*)>1, все члены прогрессии делятся на *d* и поэтому не являются простыми числами.

Сформулированная теория была впервые высказана Л. Эйлером в 1783 г. В 1798 г. А. Лежандр опубликовал доказательство для четных *m*, использовавшее, как выяснилось позднее, одну ошибочную лемму.

Полностью доказал теорему в 1837–1839 гг. Петер Густав Лежен-Дирихле (1805–1859), немецкий математик, автор трудов по аналитической теории чисел, теории функций, математической физике.

В 1837 г. вышли две работы Дирихле, посвященные теореме о простых числах в арифметической прогрессии. Они содержали формулировку теоремы в общем виде, однако доказательство приводилось только для случая, когда разность прогрессии есть простое число. В конце второй работы содержится построение характеров для произвольного модуля и некоторые утверждения о том, как можно доказать утверждение *L* (1,χ)≠0 для неглавных характеров x в одном случае. В 1839 г. Дилихле опубликовал полное доказательство теоремы о простых числах в арифметической прогрессии. С тех пор она носит его имя.

# 1. Характеры

## 1.1 Определение характера. Основные свойства характеров

**Характером** (от греческого хараæτήp-признак, особенность) χ конечной абелевой группы G называется не равная тождественно нулю комплекснозначная функция, определенная на этой группе и обладающая тем свойством, что если, А∈*G* и B∈*G*

χ (АВ)= χ (А) χ(В).

Обозначим через Е единичные элементы в группе G и через А-1 обратный элемент для А∈*G*

Характеры группы G обладают следующими ***свойствами***:

**1**. Если Е-единица группы, то для каждого характера χ

χ (Е)=1 **(1.1)**

*Доказательство*. Пусть для каждого элемента А∈*G* справедливо неравенство

χ1(А)=χ(АЕ)= χ(А) χ (Е)

Из этого равенства получим, что χ (Е)≠0. Теперь из равенства

χ (Е)= χ (ЕЕ)= χ (Е) χ (Е)=1

следует равенство (1.1)

**2**. χ (А) ≠0 для каждого А∈*G*

Действительно, если бы χ (А) =0 для некоторого А∈*G*, то

χ (А) χ (А-1)= χ (АА-1)= χ (Е)=0,

а это противоречит свойству 1.

**3**. Если группа G имеет порядок h, то Аh=Е для каждого элемента А∈*G* Следовательно,

1= χ (Е)= χ (Аh)= χ (А)h,

то есть χ (А) есть некоторый корень степени h из единицы.

Характер χ1, обладающий свойством χ1(А)=1 для каждого элемента А∈G, называется *главным характером* группы *G*. Остальные характеры называются неглавными.

**Лемма 1.** Пусть *Н* подгруппа конечной абелевой группы *G*, причем *G/H* – циклическая порядка *n*, тогда для каждого характера χH – подгруппы *Н* существует ровно *n* характеров.

***Доказательство***. Рассмотрим группу *G=gkH*, причем gnH=H, gn∈H и gn=h1=1.

Для каждого элемента X∈*G* существует и притом единственное к=кх и hх=h такое, что если 0≤ кх <n, то X= gkх hх=gkh. Возьмем еще один элемент группы *G*, Y= gm hy, где 0≤ m<n. Перемножим эти два элемента

ХY= gк+m hhy.

Определим характер χ (X).

χ (X)= χ (gк h)= χ (gк) χ (n)= χ к (g) χ H (h).

В данном выражении неизвестным является χ (g).

χ n (g)= χ (gn)= χ (h1)= χ H(h1) – данное число.

**χ (g)= – n корней из 1,**

то есть ξјn=χn(g)= χ H(h1), получаем xk (g)= ξјn. Следовательно, x(g)= ξ1, …, ξn

Из полученных равенств получаем:

χ (X)= χ k (g) χ H(hx)= ξjkx χ H (hx)

χ (Y)= χ m (g) χ H(hy)= ξjky χ H (hy)

Определим умножение характеров

χ (X) χ (Y)= ξjky χ H (hy) ξjk-x χ H (hx)= ξjkx+ky χ H (hx) χ H (hy)= jk+m χ H (hhy)

Для того чтобы определение выполнялось, необходимо рассмотреть степень gkx+kx. Возможны два случая:

1) Если 0≤ кх + ky<n, то

кх + ky= kxy,; hxhy = hxy.

В этом случае определение выполняется.

2) Если n≤ кх + ky<2n-1, то получим

кх + ky = n + kxy..

Тогда

XY= g kx+ky hxhy=ghgkx+ky-n hx hy=gkx+ky-n h1hxhy

В свою очередь 0≤ кх + ky – n≤n-1 ⇒ kx+ky – n=kxy, h1hxhy = hxy.

χ (XY) = ξj kх+kу χн (hxу) = ξj kх + kу – n χн (h1) χн(hx) χн (hy) = ξjкх ξj ку ξj– n χн (h1) χн(hx) χн (hy) = ξj кх χн (h1х) · ξj ку χн(hy) = χ (X) χ(Y).

Лемма доказана.

5. Характеры конечной мультипликативной абелевой группы *G* образуют конечную мультипликативную абелевую группу Ĝ.

Под произведением двух характеров χ' и х χ'' группы G будем понимать характер х, определяемый следующим свойством:

χ (AB) = χ' (A) χ'' (В)

Для любого элемента А∈G, имеем:

χ (АВ) = χ' (АВ) χ'' (АВ) = χ' (А) χ' (В) · χ'' (А) χ'' (В) = χ(А) χ(В)

Таким образом, получаем χ ' χ '' действительно является характером.

Роль единичного элемента группы G играет главный характер χ1

Обратным элементом G является:

χ2 (g1 g2) = == = χ2(g1) χ2(g1)



## 1.2 Суммы характеров. Соотношение ортогональности

Пусть G – конечная мультипликативная абелева группа порядка h. Рассмотрим сумму:

S = ,

где А пробегает все элементы G, и сумму

Т = 

где χ пробегает все элементы группы характеров Ĝ.

Рассмотрим чему равна каждая из сумм.

а) Если В-фиксированный элемент группы G и А пробегает все элементы G, то АВ также пробегает все элементы группы G. Следовательно,

S·χ (В) = χ (В) =  =  = S.

Получили Sχ (В) = S, откуда следует, что (χ (В) – 1)·S = 0. Следовательно, возможны два варианта:

1) S = 0, то χ (В) – негативный характер

2) S≠0, то χ (В) = 1 для каждого элемента В€G и в этом случае χ (В)= χ1(В) есть главный характер и сумма S равна порядку h группы G. Таким образом,

S =  = { **(1.2)**

б) Если мы умножим сумму Т на некоторый характер χ’ группы Ĝ, то аналогичным образом получим

χ’ (А) Т =  χ’ (А) =  = Т,

Следовательно,

1) или Т = 0, то А ≠Е

2) или Т ≠ 0, то χ’ (А) = 1 для каждого характера χ’€ G. В этом случае согласно свойству 3§ 1, имеем А=Е. И тогда Т=h. Таким образом,

Т = = {

## 

## 1.3 Характеры Дирихле

Пусть m – положительное целое число. Определим числовые характеры по модулю m. Мы знаем, что ϕ(m) приведенных классов вычетов по модулю m образуют мультипликативную абелеву группу порядка h=ϕ(m). Мы можем, следовательно, рассмотреть характер этой группы. Но определение характера для приведенных классов вычета по модулю m можно перенести на множество целых чисел следующим образом. Положим

χ(а)= χ(А), если а∈А,

где А – приведенный класс вычетов по модулю m. Тогда очевидно, χ(а)= χ(b) (mod m), и χ(ab)= χ(а) χ(b), если (а, m)=(b, m)=1. Поскольку χ(А)≠0 для каждого приведенного класса вычетов А, то χ(а)≠0, если (a, m)=1.

Это определение применимо только к целым числам а, которые взаимно просты с m.

Мы можем рассмотреть его на все целые числа, положив

χ(а)=0, если (a, m)>1.

Следовательно, характер по модулю m есть арифметическая функция χ, обладающая следующими свойствами:

χ(а)= χ(b), если с=b (mod m)

χ(ab)= χ(a) χ(b) для всех целых a и b

χ(а)=0, если (a, m)>1

χ(а)≠0, если (a, m)=1

Имеется точно ϕ(m) – количество характеров по модулю m, где ϕ(m) – количество положительных целых чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m. Они образуют мультипликативную абелеву группу приведенных классов вычета по mod m. Единичным элементом этой группы будет главный характер χ1, то есть такой характер, что χ1(а)=1, если (а, m)=1. Далее имеем следующее соотношение ортогональности:

= {

= {

Пусть m – положительное целое число. Определим числовые характеры по модулю m. Комплекснозначная функция, определенная для всех целых чисел n, называется числовым характером или характером Дирихле по модулю m, она удовлетворяет следующим условиям:

а) χ (n) = 0 тогда и только тогда, когда (n, m) ≠ 1

б) χ (n) периодична с периодом m

в) для любых чисел а и b

χ (аb) = χ (а) χ (b)

Функция

χ1(n) = {

является числовым характером и называется главным характером. Остальные числовые характеры по модулю m называются неглавными.

Имеет место следующее утверждение о числовых характерах.

**Теорема 1** Существует равно φ(m) числовых характеров по модулю m. Если χ = χ (n) – числовой характер по модулю m, то:

1) для n, взаимно простых с модулем m, значения χ (n) есть корень из 1 степени φ(m).

2) для всех n выполняется неравенство /χ (n)/ ≤1

3) Имеет место равенство

{

4) Для каждого целого числа n

 = {

**Доказательство.** Пусть χ (n) – некоторый числовой характер по модулю m. Из пункта б) определения следует, что χ (n) задает некоторую функцию χ’() = χ (n) на мультипликативной группе классов вычетов по модулю m, взаимно простых с m, а именно



χ’() = χ (n)



Здесь обозначает класс вычетов по модулю m, содержащий n. Так как χ(1) ≠ 0, то χ’() не равняется тождественно нулю, а из пункта в) определения числового характера следует, что χ’() = χ’() = χ’ (*ab) =* χ (*a*) χ (*b*) = χ’()χ’().



Таким образом, χ’() есть характер модультипликативной группы Gm.



Обратно, по каждому характеру χ’() группы Gm можно построить числовой характер χ (n) по модулю m, положив



{

Установленное соответствие является взаимнооднозначным. И все утверждения теоремы 1 следуют из доказанного выше для групповых характеров применительно к группе Gm, если учесть, что порядок группы Gm равен φ(m), где φ(m) – функция Эйлера.

В дальнейшем требуется еще одно утверждение с числовых характерах. Обозначим для каждого χ, χ ≥ 1



Где суммирование ведется по всем натуральным числам n, не превосходящим χ.

Лемма 2. Пусть χ (n) – неглавный характер. Тогда для каждого χ, χ ≥ 1 справедливо неравенство

/S(x)/<m

Доказательство. Функция χ (n) периодична с периодом m и по теореме з

0, так как χ≠ χ1

Поэтому, представив [χ] – целую часть числа χ – в виде [χ]=m1+z, 0≤z≤m, будет иметь

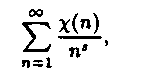
S(χ) =S([χ])=q

В виду равенства /χ(n)/≤1 отсюда получили S(χ)≤z≤m

# 2. L-функция Дирихле

Пусть х(п) – произвольный характер по модулю m. Рассмотрим ряд

, (2.1)



члены которого являются функциями комплексного переменного S. В области сходимости он определяет функцию, которая называется L-функцией Дирихле, соответствующей характеру χ(n), и обозначается L (s, χ).

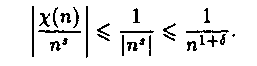
Лемма 3

1. Если χ≠χ1, то ряд (1) сходится в области ReS > 0 и определяемая им функция L (s, χ) является аналитической в этой области.

2. Ряд, определяющий L (S, χ1), сходится в области ReS >1. Функция L (S, χ1) является аналитической в области ReS > 1.

Доказательство.

Пусть χ(n) – произвольный характер по модулю m, а б – некоторое положительное число. Так как /χ(n)/ ≤ 1, то в области ReS > 1 + б справедливо неравенство



Следовательно, ряд (1) равномерно сходится в области ReS > 1 + б. Определяемая им функция L (S, χ) по теореме Вейерштрасса о сумме равномерно сходящегося ряда аналитических функций является аналитической в этой области. Ввиду произвольности 6 это доказывает второе утверждение Леммы.

Для неглавных характеров χ(n) потребуется более сложное исследование ряда (1).

Лемма 4 (преобразование Абеля).

Пусть an, n=1,2,…, – последовательность комплексных чисел, χ>1,

А(χ)=

а q(t) – комплекснозначная функция, непрерывно дифференцируемая на множестве 1≤t≤∞

Тогда

 (2.2)

Если же



то

 (2.3)

при условии, что ряд в левой части равенства сходится.

Доказательство. Положим А(0)=0 и В(х) равным левой части равенства (2.2). Тогда при любом натуральном N



так как А(0)=0. Далее



поскольку функция А(х) постоянна на каждом полуинтервале n≤t<n+1. Следовательно, равенство (2.2) доказано при целых значениях х.

пусть х≥1 – произвольное число. Положим N=[x]; значит, N≤x≤N+1. Тогда А(х)=А(N), B(x)=B(N), а



Следовательно,



Тем самым доказано, что равенство (2.2) верно и для нецелых чисел значений х.

Равенство (2.3) получаем из равенства (2.2) переходом к пределу при х→∞. Лемма доказана.

Воспользовавшись леммой 4, получим следующее равенство

 (2.4)

где

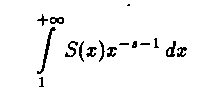


функция, введенная Лемме 4.

Для s = π+it из области ReS = σ, где σ – некоторое положительное число, пользуясь леммой 4, находим



Поэтому интеграл

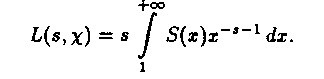


сходится в области ReS > σ. Поскольку в этой области выполняется неравенство



то из равенства (2) следует, что ряд (1), определяющий функцию L (S, x), сходится в области ReS > σ. Эти рассуждения справедливы для любого положительного числа σ. Значит, ряд (1) сходится в полуплоскости ReS > 0.

Из равенства (2) следует, что в этой полуплоскости для L-функции, соответствующей неглавному характеру χ(n), справедливо представление



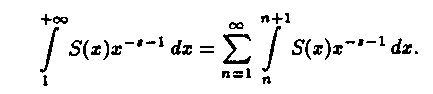
 (2.5)

так как

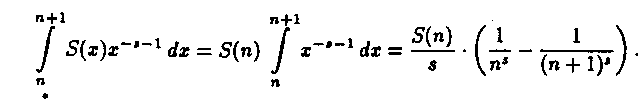


Интеграл, стоящий в правой части равенства (2.5), можно также представить в виде

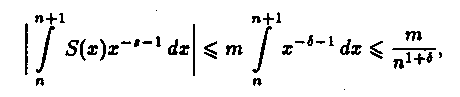
(2.6)



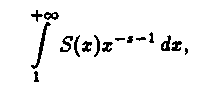
Члены ряда (2.6) являются аналитическими функциями в области ReS >σ, что следует из равенств



При этом использовано, что на полуинтервале n≤х< n+1 функция S(х) принимает значение S(n). Поскольку



то ряд (2.6) равномерно сходится в области ReS >σ. Отсюда, как и выше, получаем, что сумма его, т.е.

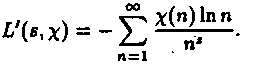


является аналитической функцией (по теореме Вейерштраса) в области ReS >σ.

Из представления (2.5) следует теперь, что L (S, x) есть аналитическая функция в полуплоскости ReS >σ, а ввиду произвольности S – σ и b полуплоскости ReS > 0.

Следствие. Пусть χ (n) – произвольный характер. Тогда в области ReS > 1 справедливо равенство

(2.7)



Это следует из того, что ряд (2.1) по доказанному равномерию сходится в области ReS>1+σ, где σ>0. Следовательно, по теореме Вейштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций в этой области ряд (2.1) можно почленно дифференцировать



Поэтому в полуплоскости ReS>1+σ выполняется равенство (2.7). Так как в этом рассуждении σ-любое положительное число, то равенство (2.7) будет справедливо в полуплоскости ReS>1.

Для L-функций имеет место представление в виде бесконечного произведения по простым числам, аналогичное тождеству Эйлера. Рассмотрим вспомогательную Лемму.

Лемма 5. Пусть функция f(n) вполне мультипликативна и ряд

 (2.8)

абсолютно сходится. Тогда выполняется равенство

 (2.9)

Доказательство. Отметим прежде всего, что /f(n)/<1 при любом натуральном n>1. В противном случае при каждом m∈Ν

/f(n)m/=/f(n)/m≥1,

что противоречит сходимости ряда (2.6). Поэтому при каждом простом р ряд



абсолютно сходится, и его сумма как сумма бесконечно убивающей геометрической прогрессии равна (1-f(р))-1. Кроме этого, в силу абсолютной сходимости, ряды можно перемножить. Перемножая конечное число таких рядов и используя то, что f(n) есть вполне мультипликативная функция, получим



где ne = pα … pαs и в сумме в правой части равенства содержатся такие и только такие слагаемые f(ne), что все просты делители ne не превосходят х. Следовательно, в разности



остаются те и только те слагаемые f(me), для которых у числа me имеется хотя бы один простой делитель р>x. Тогда оценим разность

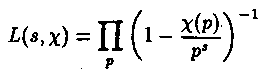
/S-S(x)/≤

и из абсолютной сходимости ряда (2.8) следует, что



Это доказывает, что бесконечное произведение (2.7) сходится и выполняется утверждение Леммы.

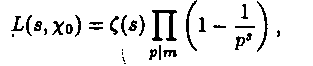
Лемма 6. Для каждого характера χ(n) в области ReS > 1 справедливо представление



Доказательство. Эта лемма является следствием Леммы 5, поскольку функция χ(n) вполне мультипликативна, то есть χ(АВ)= χ(А) χ(В), и выполняется неравенство /χ(n)/≤ 1 по теореме 1.

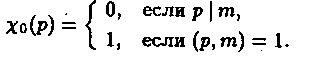
Следствие 1. В области ReS > 1 для главного характера χ1(n) по модулю m справедливо равенство

(2.10)

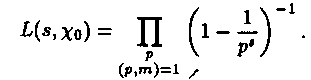


и поэтому функция L (S, χ1) может быть аналитически продолжена в область ReS > 0, где она имеет единственный полюс (первого порядка) в точке S=1.

Действительно, по определению главного характера χ1(n) имеет место равенство



Поэтому

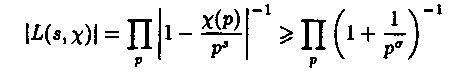


Пользуясь теперь тождеством Эйлера для дзета-функции Римана получаем равенство (2.10). Остальные утверждения легко следуют из этого равенства, поскольку дзета-функция является аналитической в области ReS > 0 с единственным полюсом первого порядка в точке S = 1.

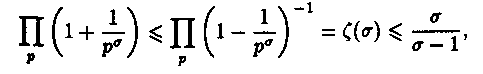
Следствие 2. Для каждого характера χ функция L (S, x) не обращается в нуль в области ReS > 1.

Доказательство.

Если σ = ReS > 1. то



Пользуясь неравенством для дзета-функции Римана, находим



Получаем:

L (S,χ) ≥ > 0



Теперь докажем утверждения, что L – функция, соответствующая неглавному характеру χ, точке S =1 отлична от нуля.

**Теорема 2.** Если χ – неглавный характер, то L (1, χ)≠0

Для доказательства рассмотрим 2 случая

1. Пусть характер χ – комплексное число, не является действительным. Тогда характер χ2(n) не является главным. В этом случае доказательство теоремы будет основываться на тех же идеях, что и доказательство отсутствия нулей дзета – функции на прямой ReS=1.

**Лемма7.** Пусть 0<*ч<*1, а х – действительное число, тогда выполняется неравенство /(1 – *ч*)3 (1 – *чеix*)4 (1 – *че2ix*)/-1 ≥ 1

Доказательство.

Для всех z из круга /z/<1 имеет место расположение

– *ln* (1 – z) = **(2.11)**



Так как ln(t) = Re lnt, то обозначая М (*ч* φ), левую часть неравенства (2.11), получим

lnM (*ч* φ) = 3ln (1 – *ч*) – 4 ln (1 – *чеi4*) – ln (1 – *че2i4*) = – 3ln (1-*ч*) – 4Reln/1 – *чеi4*/ – Reln/1 – *че2i4*/=rc (3+4e)inl /1-rei4/= (3+4cosnl+2cos2nl)= (2+4cosα+1+cos2α)=1 (1+cosα)2≥0



ln=M (r, l)=≥0

Следовательно, M (r, l)=≥1 доказана.

Из леммы 7 следует, сто при любом действительном S>1 выполняется равенство:

*|L3(8,* χ*1) L4(S,* χ*) 4 (S,* χ*4) 1 = П* (1- )3(1- )4(1- )|-1 (2.12)



Получая в лемме *ч* = *р*-s, т.е.

0< *ч* = χ*1(р)*<1

0< *р*-s <1

χ *(р) р-s* = *чеi4*, в силу того что χ *(р)* – комплексное

χ *(р) р-s = че2i4*

Получаем, что каждый сомножитель в правой части равенства (f) не меньше 1 и, следовательно, при любом S>1 выполняется равенство:

|L3(Sχ1) · L4(Sχ) L (Sχ2)| ≥ 1 (2.13)

Допустим, что для некоторого характера χ (χ2≠χ1) выполняется равенство

L (1, χ) = 0 (2.14)

Оценим сверху левую часть неравенства. Из оценки дзета-функции Римана

ξ(S) ≤ , следует, что при S € R, S>1 выполняется неравенство



а) 0 < 4 (S, χ1) =



получили 0<L (S, χ1)≤



б) Функция L (S, χ) разложим в ряд Тейлора

L (S, χ) = Cp + C1 (S – 1) + C2(S – 1)2 +… + Cn(S – 1)n +…

Предположим, что у нее есть нуль L (1, χ) = 1; тогда С0 = 0

Перепишем разложение L – функции в ряд

L(Sχ) = Cк (S – 1)к + Ск+1(S – 1)к+1 = (S – 1)1 (Cк + Ск+1(S -1)+….), где к≥1, Ск ≤ 0, т. к. S>1

| L (S, χ)| = |S – 1|k| Ck + Ck+1(S – 1) +….| ≤ 2 Ck|S – 1)k, при |S – | < r

Функция L (S, χ2) в точке S = 1 не имеет полюса, следовательно не имеет особенности. Это в силу того, что χ комплексное и χ2≠χ1

Получаем неравенство:

L (S, χ2) ≤ C,

При условии | S – 1|< δ

Учитывая все неравенства и оценки

| L3 (S, χ) L4(S, χ) L (S, χ2)| = ()3 · 24 |Ck|4 (S – 1)4k· C≥1



Следовательно, это неравенство становится противоречивым, если перейти к пределу при S→1+0. Полученное противоречие показывает, что равенство (2.14) не выполняется.

2. Рассмотрим χ – вещественный характер, т.е. принимающий только вещественные значения, несовпадающий с главным характером

**Лемма 8.** Пусть χ – вещественный характер.

Рассмотрим функцию

F(S) = ξ(S) L (S, x) (2.15)

Докажем, что если Re S>1, то

 (2.16)

представляется рядом Дирихле, которого справедливы следующие утверждения:

1) Все коэффициенты *аn* ≥ 0

2) при n=k2, k € / N(N)/ *аn*≥1

3) В области ReS<1 можно почленно дифференцировать, то есть

F (k) (S)= (-1)k(ln n)k k=1,2…; (2.17)

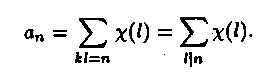


4) Ряд (1) в точке S=1/2 расходится.

Доказательство. В области ReS > 1 ряды, определяющие функции S(S) и L (S,χ), абсолютно сходятся, поэтому их можно перемножить:

где

(2.19)



Пусть - расположение числа n в произведение простых сомножителей. Тогда все натуральные делители l числа n имеют вид

поэтому из равенства (14) находим, что



где ani = 1+ χ (pi)+ … +χLi (pi), i=1,…, m (2.21)

так как χ – вещественный характер, то он может принимать только три значения: 0, 1, -1. Из равенства (2.21) следует, что

 (2.22)

Во всех случаях числа ani≥0, а значит, и an=an1 … anm≥0

Если же число п является полным квадратом, то

N=k2=p/2γ … pm 2γ,

и из равенств (2.20) и (2.22) следует, что аn ≥1

При любом σ > 0 в области ReS> 1 +σ выполняется неравенство



Ряд (2.18) сходится в области ReS > 1. Поэтому по признаку Вейерштрасса ряд (2.16) сходится равномерно в области ReS > 1 + σ, а по теореме Вейерштрасса его можно в этой области почленно дифференцировать любое число раз. Следовательно, в области ReS > 1 +σ выполняется равенство (2. 17), а в силу произвольности σ оно выполняется и в области ReS > 1.

Однако ряд (39) расходится, так как по второму утверждению леммы

Ряд (2.16) при S =  имеет неотрицательные члены. Поэтому, если бы он сходился, то также сходился бы ряд

(2.23)

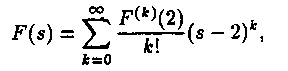


Следовательно, ряд (2.23) расходится. Лемма доказана.

Переходим непоредственно к доказательству второго случая теоремы. Допустим, что L (1,χ) = 0. Тогда полюс дзета-функции будет компенсироваться в произведении S(S) L (S, χ) нулем функции L (S, χ).

Поэтому функция (2.15) F(S) будет аналитической в области ReS > 0 так как в точке S=1 у F(ζ) – устраненная особая точка. Следовательно, ее можно разложить в ряд Тейлора в точке S = 2:

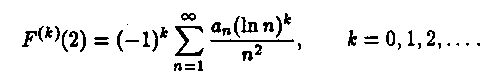
(2. 24)



радиус сходимости которого не меньше 2 R≥2/

Из равенств (2.17), в частности S=2, находим

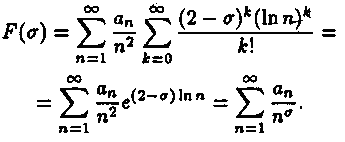
(2.25)



В радиусе сходимости будет брать не все S, а только вещественные ReS=σ S=σ∈(0,2). Пользуясь разложениями (18) и (19), находим



Члены двойного ряда неотрицательны, поэтому он сходится абсолютно, и в нем можно поменять порядок суммирования. Тогда



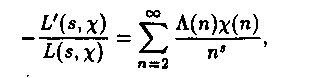
Следовательно, ряд (2.16) сходится во всех точках, σ < (, 0, 2), и в точке , а это противоречит четвертому утверждению леммы. Поэтому L (S,χ)≠0/

Этим завершается доказательство теоремы

По следствию 2 леммы 2 функция  является аналитической в области ReS > 1. Для дальнейшего доказательства теоремы Дирихле нам будет необходимо представление этой функции в виде ряда, аналогичного ряда (2.16).

Лемма. Для каждого характера χ(n) в области ReS > 1 справедливо равенство

(2.26)



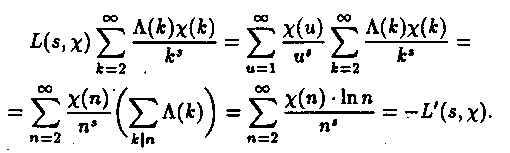


Доказательство.

Так как S=σ+it имеет место неравенство



получаем, что ряд стоящий в правой части равенства (2.26), абсолютно сходится в области σ>1. Умножим этот ряд на ряд определяющий L (S, χ). Получили



Предпоследнее равенство имеет место ввиду равенства ), а последнее – по следствию из леммы 3, равенство 2.7.

**3. Доказательство теоремы Дирихле**

Теорема. Если разность и первый член арифметической прогрессии есть взаимно простые натуральные числа, то она содержит бесконечное множество простых чисел.

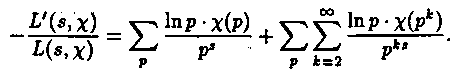
Доказательство.

Рассмотрим равенство (2.26), которое справедливое по Лемме в области ReS > 1. Поскольку (n) = 0 для всех n, не являющихся степенями простых чисел, то все отличные от нуля члены ряда в правой части (2.26) имеют вид



где р – простое и k – натуральное числа. Ряд (2.26) абсолютно сходится, следовательно, его можно представить в виде двойного ряда) и, значит, в области ReS > 1

(3.1)



Второе слагаемое в правой части этого равенства равномерно ограничено по s в области ReS≥3/4. Действительно, если S=π+it, π≥3/4, то



Следовательно, при S→1+0 для каждого характера χ имеет место равенство

 (3.2)

Здесь и в дальнейшем s → 1 + ο обозначает, что S стремится к 1 по действительной оси справа.

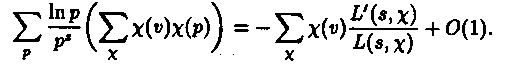
Пусть υ – некоторое натуральное число, удовлетворяющее сравнению

(3.3)

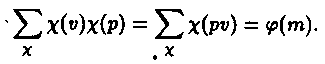


Умножим обе части равенства (3.2) на χ(υ) и просуммируем получившиеся равенства по всем числовым характерам χ. Тогда получим

(3.3)



Если простое число р удовлетворяет сравнению р ≡l (mod m), то pυ ≠ 1 (mod m), и по теореме 1

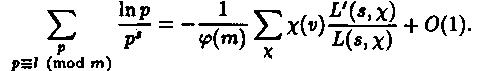


Если же p≠l (mod m), то pυ≠ 1 и по той же теореме



Таким образом, равенство (3.3) можно переписать в виде

(3.4)



По лемме 3 и теореме 2 для неглавного характера χ функция является аналитической в точке S = 1. Поэтому для таких характеров при S →1 + 0 имеем



(3.5)



По следствию 1 леммы 4 функция L (S, χ1) имеет в точке S=1 полюс первого порядка. Значит, при S→1+0

 (3/6)

Учитывая равенства (3.5) и (3.6.) из равенства (26) получаем, что



Так как число υ удовлетворяет сравнению (3.3), то (υ, m) = 1 и χ0(υ)=1. Итак, при S→1+0

 **(3.7)**

Правая часть равенства а (3.7) при S→1+0 имеет бесконечный предел. Значит, сумма, стоящая в левой части этого равенства, имеет бесконечное множество слагаемых. Поэтому существует бесконечное множество простых чисел, удовлетворяющих сравнению

p≡e (mod m)

Теорема Дирихле доказана.