*Реферат на тему:*

Математичне моделювання

та диференціальні рівняння.

**1.1. Поняття математичного моделювання.**

Поняття математичного моделювання трактується різними авторами по своєму. Ми будемо його пов’язувати з нашою спеціалізацією – прикладна математика. Під математичним моделюванням ми будемо розуміти метод дослідження процесів або явищ шляхом пибудови їхніх математичних моделей і дослідження цих процесів. В основу методу покладемо адекватність між змінними складеного рівняння і досліджуваного процесу. Зрозуміло, що на практиці ці процеси не будуть абсолютно ідентичні. Але можна удосконалювати математичну модель, яка більш точно буде описувати цей процес. Треба пам’ятати, що в останньому випадку,як правило, математичні рівняння ускладнюються. А це означає, що їх моделювання на ЕОМ потребує більше часу, або ж більше не визначаючих обчислювальних комплексів.

Схема таких досліджень починається з постановки задачі і щакінчується проведенням ефективного обчислювального експеременту. Її умови можна записати в такй формі:

а) постановка задачі;

б) побудова математичної моделі;

в) перевірка її адекватності;

г) узагальення та теоретичне дослідження данного класу задач;

д) створення програмного забезпечення;

е) проведення обчислювального експеременту;

ж) впровадження цих результатів в виробнитство.

Розглянемо питання використання диіеренціальних рівнянь в деяких предметних областях.

**1.2. Диференціальні рівняння в екології.**

Екологія вивчаеє взаємо відношення людини і, взагалі, живих організмів з навколишнім середовищем. Основним об’єктом дослідження в екології являється еволюція популяцій (сукупність одного виду рослин, тварин, чи мікроорганізмів, які населяють протягом тривалого часу певну територію).

Опишемо математично процес розмноження чи вмирання популяцій.

Нехай  – кількісний стан популяції в момент ****,  – число, яке відповідає кількості народжених,  – умираючих в одиницю часу. Тоді запис зміни координати  задається формулою:

 (1.1)

В (1.1)  і можуть залежити від . Наприклад:

**** (1.2)

Де  – коефіцієнт народжуваності, – смертності. Маємо з (1.2)

 (1.3)

Розв’язок диференціального рівняння запишемо в вигляді

З розв’язку (1.4) видно, що при  популяція вижчваюча, а при **** – вмираюча.

 (1.4)

# Рівняння (1.3) в деяких випадках береться нелінійне

 (1.5)

Це рівняння Беруллі при  і його розв’язок запишеться в такому вигляді

 (1.6)

З формули (1.6) видно, що при **.** При цьому можливі випадки

, та 

Рівняння (1.5) описує.

Можна говорити і про більш складні рівняння, системи рівнянь.

Розглянемо більш детально двух видову модель «хижак-жертва», яка була побудована для виявлення коливань рибних уловів в Адріатичному морі.

Нехай  –число великих риб-хижаків,  – число малих риб-жертв в момент часу , тоді число риб-хижаків буде рости до тих пір, поки у них буде їжа. Якщо корму не буде вистачати, то кількість риб-хижаків буде зменьшуватися і тоді, починаючи з деякого моменту, буде рости число риб-жертв. Модель має вигляд

 (1.7)

де – додатні константи.

В (1.7) доданок  виражає залежність прирісту великих риб від числа малих,  – зменьшення числа малих риб від великих.

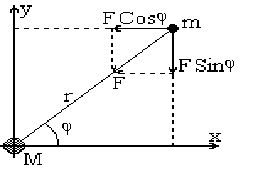
**1.3. Закони Кеплера руху планет.**

Згідно закону всесвітнього тяжіння два тіла, які знаходятся на віддалі  друг від друга і які мають маси **** і  притягаються з силою

 (1.8)

де - константа тяжіння.

Опишемо рух планети з масою  навколо Сонця маси . Вплив других планет на них не будемо враховувати. (Мал 1.1).



Сонце знаходиться в початку координат, а планета має положення  в момент часу . Використавши другий закон Ньютона маємо:

 (1.9)

# Враховуючи, що

Позначимо , прийдемо до системи



 (1.10)

Без обмеження загальності візьмемо початкові умови:

 при  (1.11)

Перейдемо до полярних координат:







Позначивши отримані вирази в (1.10) будемо мати



Помножимо перше рівняння на ,друге на **** і складемо:

 (1.12)

Домножимо перше рівняння на ,друге на **** і складемо:

 (1.13)

Перепишемо в нових змінних умови (1.11):

Рівняння (1.13) перепишемо у вигляді

 (1.14)

 (1.15)

Звідки маємо

 (1.6)

Константа  має цікаву гнометричну інтерпретацію. З курсу математичного аналізу відомо, що площа сектора  обчислюється за формулою

## Звідки

 (1.17)

,або 

Останній вираз означає секторну швидкість. З (1.16) випливає, що вона являється постійною. Це означає, що радіус-вектор “замітає” за рівні проміжки часу рівні площі.

***1-ій закон Кеплера***: кожна із планет рухається по плоскій кривій відносно Сонця так, що радіус-вектор, який зв’язує Сонце і кожну з планет, “замітає” рівні площі за рівні проміжки часу.

Задачу Кощі (1.12)-(1.14) можна розв’язати. Розв’зок має еліпсоідальну форму, на основі цього робиться наступний висновок:

***2-ій закон Кеплера***: траєкторії планет рухаються по еліпсам, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

З аналізу траєкторій випливає таке твердження:

***3-ій закон Кеплера***: квадрати періодів обертання планет пропорційні кубам великих осей їх орбіт.

**1.4. Диференціальні рівняння закону пропиту і пропозиції в економічних дослідженнях.**

Пропит і пропозиція – економічній категорії товарного виробництва. Пропит – представлена на ринку потреба в товарах, пропозиція – продукт, який є на ринку чи може бути доставлений на нього.

Нехай  – ціна, наприклад, на фрукти, – тенденція формування ціни. Тоді, як попит так і пропозиція будуть функціями введених величин. Як показує практика, ці функції можуть бути різними. Часто попит  і пропозиція  задаються лінійними

 (1.17)

залежностями. Наприклад:

Для того, щоб попит відповідав пропозиції необхідно:



Звідки

 (1.8)

Припустимо, що в момент  1кг фруктів коштував 1крб. Тоді , ****, отже

 (1.19)

Це закон зміни цін, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

**1.5 Найпростіші рівняння руху частинок в електромагнитних поясах.**

Швидкість зміни імпульсу частинки



дорівнює силі Лоренса, яка діє на неї

 (1.20)

де  – зарядове число,  – заряд частинки,  – вектор напруженності прискорюючого поля,  – вектор магнітної індукції, **** – вектор швидкості частинки.



де – маса спокою, -приведена енергія частинки.



- векторний добуток двох змінних.

З (1.20) маємо:

 (1.21)

Рівняння (1.21) не враховує власного поля пучка(кулонівських сил).

Систему (1.21) перепишемо в скалярній формі:

 (1.22)

Визначимо



тобто



так як , то визначимо:



Тому

 (1.23)

Підставляючи (1.23) в (1.22) отримаємо рівняння руху.

Але в ці складні рівняння ще входять компоненти електромагнітного поля, які визначаються рівняннями максвела:

 (1.24)

Тут  – електрична і магнітна сталі,  – об’ємна густина заряду,  – вектор густини струму, **-** знак транспонування.

А (1.24) – це рівняння в частинних похідних з складними граничними умовами. Задача заключається не тільки в моделюванні рівнянь руху, а й в розрахунках оптимальних систем.

**1.6. Використання диференціальних рівнянь в біології і математичних обчисленнях.**

***Біологія***. Необхідно знайти залежність площі  молодого листка, що має форму круга, від часу . Відомо, що швидкість зміни площі  в момент  пропорцієн площі листка, довжини його ободу та косинусу кута між падаючим на листок сонячним променем і верікаллю листка. Маємо модель:

 де  (1.25)

**** – const**, **, **** – коефіцієнт пропорційності; розв’язуючи рівняння (1.25) ми отримаємо таку залежність:

 (1.26)

***Математика***. Обчислити невласний інтеграл

 (1.27)

залежний від параметра .

Знайдемо похідну:



Отримали диференціальне рівняння

 (1.28)

При цьому відомо:

 (1.29)

Розв’язуючи задачу Коші (1.28),(1.29), отримаємо:

 (1.30)

**1.7. Побудова диференціальнихрівнянь з заданими параметричними сімействами кривих.**

Припустимо, шо задано однопараметричне сімейство кривих:

 (1.31)

Задача полягає в тому, щоб знайти диференціальне рівняння, розв’язками якого являються криві (1.31). Вважаючи, що функція (1.31) має повну похідну за **x** запишемо:

 (1.32)

Тоді з (1.31) та (1.32) як з системи рівнянь, вилучаємо сталу  і отримаємо шукане диференціальне рівняння першого порядку.

Якщо ж задано - параметричне сімейство кривих:

 (1.33)

то до (1.33) додаються дані співвідношення:

 (1.34)

з(1.33) та (1.34), як з системи рівнянь, кількість яких , вилучаються сталі  і отримане таким чином співвідношення між 

 (1.35)

і буде шуканим диференціальним рівняння -го порядку.

В (1.32) та (1.34)  означають частинні похідні відповідних порядків за вказаними змінними. При цьому припускаємо, що похідні існують, тобто функції (1.32) та (1.34) являються диференційовними відповідну кількість разів.

Аналогічно поступають і при складанні систем рівнянь.

***Приклад 1.1.*** Знайти диференціальне рівняння першого порядку, розв’язками якого буде однопараметричне сімейство

 (1.36)

***Розв’язання.*** Продиференйіюємо за  праву частину нашого співвідношення в припущенні, що .

 (1.37)

Враховуючи (1.36) рівність (1.37) перепишемо таким чином:

 (1.38)

З (1.38) знаходимо 

****

і підставивши в (1.36) отримаємо шукане диференціальне рівняння

 (1.39)

***Приклад 1.2.*** Знайти диференціальне рівняння другого порядку, розв’язками якого буде двопараметричне сімейство

 (1.40)

***Розв’язання***. Згідно описаного вище складаємо систему рівнянь:

 (1.41)

З якої вилучивши  і  знаходимо шукане диференціальне рівняння:

 (1.42).