# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ В ПЕРЕМЕННЫХ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

## **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ**

Математическая модель системы в переменных пространства состояний имеет вид

, (2.1.1)

 (2.1.2)

где мерный вектор параметров состояний;  мерный вектор управляющих воздействий;  мерный вектор возмущающих воздействий; l- мерный вектор выходов; А – матрица состояний системы размерности ; В – матрица управлений размерности ; Г – матрица возмущений размерности ; С – матрица выходов размерности ln; D – матрица компенсаций (обходов) размерности lm.

Решение векторного дифференциального уравнения (2.1.1) имеет следующий вид:

, (2.1.3)

где  - экспоненциал матрицы А.

Подставляя выражение (2.1.3) в формулу (2.1.2), получаем интегральное уравнение движения системы в переменных «вход – выход».

Рассмотрение движения системы в переменных пространства состояний связано с трудностью решения дифференциальных уравнений n-го порядка, описывающих движение системы в переменных «вход – выход», и с хорошо разработанными методами решения систем дифференциальных уравнений первого порядка.

**2.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

### Задача 2.2.1

Определить переходные процессы в системе



 (2.2.1)

, (2.2.2)

под действием ступенчатых воздействий по каналам управления

 и возмущения .

### Решение

В соответствии с выражениями (2.1.2), (2.1.3) запишем уравнение движения системы в интегральной форме

. (2.2.3)

Учитывая, что u(t)=u\*1(t)=u, r(t)=r\*1(t)=r и t0=0, представим выражение (2.2.3) в виде

. (2.2.4)

Для нахождения экспоненциала матрицы А определим корни характеристического уравнения , то есть

 и .

Так как корни различные действительные и матрица А диагональная, то ее экспоненциал равен

. (2.2.5)

Подставляя выражения (2.2.5) в формулу (2.2.4) и последовательно проводя преобразования, получаем













=

.

Следовательно, уравнение движения рассматриваемой системы в переменных «вход – выход» имеет вид:

.

**УСТОЙЧИВОСТЬ**

## **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ**

Устойчивость или неустойчивость линейной многомерной системы (2.1.1) определяется ее свободным движением ( ), которое характеризуется собственными числами матрицы А, определяемыми из характеристического уравнения

 (3.1.1)

Линейная система (2.1.1) устойчива тогда и только тогда, когда все вещественные части собственных (характеристических) чисел λj=λj(A) (j=1,…,n) имеют неположительные значения, т.е. Reλj. Если Reλj<0, то система асимптотически устойчива.

Характеристическое уравнение (3.1.1) можно записать в виде

nn-1nn0. (3.1.2)

Условия устойчивости для системы n-го порядка записываются в виде определителей Гурвица, получаемых из квадратной матрицы коэффициентов характеристического уравнения (3.1.2).

.

Для устойчивости линейной системы по критерию Гурвица необходимо и достаточно, чтобы при α0>0 были положительными и все n диагональных определителей Гурвица, то есть ΔI>0 (i=l,...,n). Положительность последнего определителя Гурвица

Δn=αnΔn-1 (3.1.3)

при Δn-1>0 сводится к положительности свободного члена αn характеристического уравнения.

## **3.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

### Задача 3.2.1

Определить устойчивость и характер свободного движения динамической системы, заданной в пространстве состояний векторными уравнениями



, (3.2.1)

. (3.2.2)

**Решение.**

Запишем для системы (3.2.1) характеристическое уравнение (3.1.1)



, (3.2.3)

решение которого дает следующие корни:

.

Рассматриваемая динамическая система является устойчивой. Ее свободное движение носит апериодический сходящийся характер, так как вещественные части корней характеристического уравнения отрицательные.

### Задача 3.2.2

Определить устойчивость динамической системы, заданной в пространстве состояний векторно-матричными уравнениями



, , (3.2.4)

. (3.2.5)

**Решение.**

Запишем для системы (3.2.4) характеристическое уравнение (3.1.1)



. (3.2.6)

Раскроем скобки и приведем подобные члены, получим следующее характеристическое уравнение:

. (3.2.7)

Устойчивость системы будем определять на основе алгебраического критерия устойчивости Гурвица, составив для этого по уравнению (3.2.7) матрицу Гурвица

. (3.2.8)

Для устойчивости линейной системы по критерию Гурвица необходимо и достаточно, чтобы при положительности коэффициента при старшей степени (в нашем случае коэффициент при λ3 равен 1) были положительными и все n диагональных определителей Гурвица, то есть Δi>0 (i=1,2,3)

, .

В соответствии с вышеизложенным находим, что свободный член характеристического уравнения (3.2.7) равный 54 - положительный.

Следовательно, система (3.2.4) является устойчивой.

# УПРАВЛЯЕМОСТЬ

## **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ**

Управляемость системы (2.1.1), (2.1.2) по состояниям определяется теоремой (критерием) Калмана: система будет управляемой тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости Lc размерности  равен n, то есть

rankn, (4.1.1)

где

. (4.1.2)

Если rank<n, то система будет частично управляемой, а при rank=0 – полностью неуправляемой.

Управляемость системы (2.1.1), (2.1.2) по выходам (критерий Калмана): система будет управляемой тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости  размерности  равен l то есть

rank=l, (4.1.3)

где

. (4.1.4)

Если rank<l, то система будет частично управляемой по выходам, а при rank=0 – полностью неуправляемой.

Показатель степени n в выражениях (4.1.2), (4.1.4) соответствует размерности вектора состояний.

**4.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

### Задача 4.2.1

Определить управляемость динамической системы по состояниям, заданной векторными уравнениями

,

(4.2.1)

. (4.2.2)

**Решение.**

В соответствии с выражением (4.1.2) запишем матрицу управляемости для n=2, так как в рассматриваемом случае размерность вектора состояний n=2

.

Найдем произведение матриц

.

Следовательно, матрица управляемости имеет вид

,

и ее ранг rank2, то есть настоящая система полностью управляема по состояниям.

### Задача 4.2.2

Определить управляемость по выходам динамической системы, заданной векторными уравнениями

,

.

**Решение.**

В соответствии с выражением (4.1.2) запишем матрицу управляемости для n=2, так как в рассматриваемом случае размерность вектора состояний n=2

.

Найдем произведение матриц

.

.

Следовательно, матрица управляемости имеет вид

,

и ее ранг rank=2, то есть настоящая система полностью управляема по выходам.

# 5. НАБЛЮДАЕМОСТЬ

## **5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ**

Наблюдаемость системы (2.1.1), (2.1.2) определяется теоремой (критерием) Калмана: система будет вполне наблюдаемой тогда и только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости L0 размерности  равен n, то есть

rankn, (5.1.1)

где

. (5.1.2)

Если rank<n, то система будет не вполне наблюдаемой, а при rank=0 – полностью ненаблюдаемой.

## **5.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

### Задача 5.2.1

Определить наблюдаемость динамической системы, заданной векторными уравнениями



.

**Решение.**

В соответствии с выражением (5.1.2) запишем матрицу наблюдаемости для n=2, так как в рассматриваемом случае размерность вектора состояний n=2

.

Найдем произведение матриц



.

Следовательно, матрица наблюдаемости имеет вид

,

и ее ранг rank2, то есть настоящая система полностью наблюдаема.