**Индукция**

Обратимся к методу индукции. Этот метод находит систематическое применение в V-VI классах. Большинство обоснований в этих классах проводится индуктивным методом. В старших классах роль индукции снижается. Она применяется лишь в целях обнаружения математических закономерностей, обоснование же их проводится дедуктивным методом.

Переход от частного к общему, от единичных фактов, установленных с помощью наблюдения и опыта, к обобщениям является закономерностью познания. Неотъемлемой логической формой такого перехода является индукция, представляющая собой метод рассуждений от частного к общему, вывод заключения из частных посылок (от лат. inductio - наведение).

Использование этого метода рассуждений для получения новых знаний в процесс" обучения называют индуктивным методом обучения.

Для описания индуктивного метода обучения необходимо прежде всего выяснить, какие имеются виды индукции.

Пусть А={а1,а2,….}-множество всевозможных частных случаев, в каждом из которых некоторое свойство С может быть или не быть (иметь или не иметь место). Известно, допустим, что в k случаях имеет место свойство С, т. е. имеются посылки

С{а1), С(а2),...,С(аk).

Индуктивное рассуждение строится по схеме

(1),



(в схеме (1) над чертой перечислены посылки, под чертой записано заключение).

В случае, когда А - конечное множество, содержащее k элементов (всевозможных частных случаев -k), т. е наши посылки исчерпывают всевозможные



частные случаи, схема (1) представляет собой правило вывода, основанное на формуле

и заключение достоверно (истинно, если истинны посылки).

В этом случае рассуждение, построенное по схеме (1), называется полной индукцией.

Если же множество А всевозможных частных случаев содержит более k элементов или же бесконечно (что особенно часто встречается в математике), т. е. когда наши посылки не исчерпывают всевозможные частные случаи, то заключение по схеме (1) не является достоверно истинным высказыванием, а лишь вероятно истинно (правдоподобно) при истинности посылок.

В этом случае рассуждение, построенное по схеме (1), называется неполной индукцией.

|  |  |
| --- | --- |
| **Математическая индукция**  В математике широко используется еще один вид индукции - полная математическая (или математическая) индукция.  Математическая индукция - специальный метод доказательства предложений типа (или, т. е. предложений, выражающих некоторое свойство Р, присущее всем натуральным числам n (или всем n > k, где k, - определенное натуральное число). Этот метод хотя и называется индуктивным, по своей структуре представляет собой дедуктивное рассуждение, опирающееся на аксиому математической индукции:  (если 1 обладает некоторым свойством Р и если для всякого натурального числа х имеем: если оно обладает этим свойством, то им обладает и непосредственно следующее за ним число х + 1,-то всякое натуральное число n обладает свойством Р).  Ввиду того что непосредственная проверка наличия свойства Р у любого натурального числа невозможна из-за бесконечности множества N, поступают так: проверкой устанавливают наличие этого свойства у числа 1 и доказывают, что из допущения о наличии этого свойства у произвольного числа х следует его наличие и у непосредственно следующего за ним числа х +1, (т.е. устанавливается, что свойство P как бы "передается по наследству" от х к х +1). После этого заключают об истинности доказываемого предложения, т. е. о том, что свойством Р обладают все натуральные числа.  Иногда это заключение обосновывается следующим образом: так как доказываемое предложение верно для 1 и из того, что оно верно для произвольного х, следует, что оно верно и для х + 1, то оно верно и для числа 2; так как оно верно для 2, то на том же основании оно верно и для 2+1, т.е. для 3; и т.д. Следовательно, оно верно для любого натурального числа. Слова "и т. д." свидетельствуют о незавершенности, а по существу о незавершимости этого рассуждения, состоящего из бесконечного числа шагов.  Роль аксиомы математической индукции состоит именно в том, что она позволяет заменить бесконечное индуктивное рассуждение конечным дедуктивным.  Заметим, что метод математической индукции неоднократно включался в школьную программу и неоднократно исключался из нее как предмет специального изучения. В любом случае он может разъясняться в связи с решением задач.  Полная индукция находит ограниченное применение в процессе обучения.  Примером полной индукции может служить рассуждение, которым следовало бы завершить доказательство теоремы об измерении вписанного угла, если она доказывается отдельно для случая, когда центр окружности лежит на стороне угла, внутри или вне его.  Если а1 - случай "центр лежит на стороне угла", а2 - "центр лежит внутри угла" и а - "центр лежит вне угла", то {а1, а2, а3}- множество всевозможных частных случаев и, если С {а) (означает "теорема доказана в случае а"), то с помощью рассуждения по схеме полной индукции,- заключаем, что теорема доказана для всех возможных случаев, или что "теорема доказана". Это рассуждение обычно опускается в учебниках. Целесообразно его явно высказать, чтобы научить этому методу учащихся.  Обычно, когда говорят "индуктивные методы обучения", имеют в виду применение неполной индукции в обучении. Дальше, говоря "индукция", будем иметь в виду неполную индукцию.  Ввиду недостоверности заключения индукция не может служить методом доказательства. Но она является мощным эвристическим методом, т. е. методом открытия новых истин. В таком качестве индукция должна широко применяться в школьном обучении в рамках методов, ориентированных на обучение учащихся деятельности по приобретению новых знаний.  Индукция, так же как и аналогия, может привести к ложному заключению. Так, например, вычисляя значения выражения n2+n+17 при n = 1,2,3, ..., 15, мы получаем неизменно простые числа, и это наводит на мысль, что значение этого выражения при любом натуральном n есть простое число. Иначе говоря, на основании пятнадцати частных посылок получено общее заключение, относящееся к бесконечному множеству частных случаев, и это заключение оказывается ложным, так как уже при n = 16 получаем составное число  162+16+17=16\*17+17-172.  В истории математики были случаи, когда известные математики ошибались в своих индуктивных выводах. Например, П. Ферма предположил, что все числа вида 22^ n+ 1 простые, исходя из того, что при n == 1,2,3,4 они являются таковыми, но Л. Эйлер нашел, что уже при n = 5 число 232+ 1 не является простым (оно делится на 641).  Однако возможность получения с помощью индукции ложного заключения не является основанием для отрицания роли индукции в школьном обучении математике. Во-первых, применение индукции в обучении корректируется и направляется учителем к открытию истин. Во-вторых, нужно добиваться понимания учащимися правдоподобного характера индуктивного заключения. Поэтому, применяя индукцию, необходимо всячески подчеркивать, что заключение является лишь предположением, гипотезой, которое может быть доказано (если оно истинно) или опровергнуто (если оно ложно).  Например, когда учащиеся открывают свойство суммы углов треугольника с помощью измерений, необходимо разъяснить им, что мы можем высказать лишь предположение гипотезу) о том, что "во всяком треугольнике сумма углов равна 180°". Во-первых, результаты опыта лишь близки к 180°; во-вторых, даже предполагая, что все отклонения в одну или другую сторону вызваны неизбежными погрешностями измерений и для каждого из 30 треугольников, в которых мы производили измерения углов, сумма углов действительно равна 180°, мы не можем на этом основании заключить, что она равна 180° в любом треугольнике.  Такими разъяснениями мы и добиваемся понимания учащимися правдоподобного характера индуктивного заключения.  Надо отличать возможность ложного заключения от ошибочного применения индукции. В практике иногда встречаются ошибочные применения индукции, когда учащимся не предъявляется необходимое разнообразие частных посылок. Приведем пример. Учитель хотел привести учеников к открытию индуктивным путем правила умножения десятичных дробей, но из-за недостатка времени предложил только один пример, в котором во множимом и множителе вместе было три десятичных знака. После разъяснения способа умножения на этом конкретном примере учитель поставил перед классом вопрос: "Какое же правило мы нашли для умножения десятичных дробей?" Ученик отчеканил "правило": "Чтобы умножить десятичные дроби, мы умножаем их как целые числа, не обращая внимания на запятые, а в произведении отделяем справа три десятичных знака". Вот к какому открытию можно привести учащихся, если строить индукцию на базе одной частной посылки! Разумеется, возможно, что кто-нибудь из учащихся догадался, как правильно сформулировать общее правило, но наша цель-создние такой педагогической ситуации, в которой все или по крайней мере большинство учащихся догадаются, как это сделать, а для этого нужно правильно подобрать последовательность частных посылок.  Совершенно очевидно, что на вопрос, сколько надо рассматривать частных посылок и какие, чтобы подвести учащихся к открытию общей закономерности, нельзя дать ответ, пригодный на все случаи применения индукции и для всех учащихся; Мы должны заботиться, чтобы частное содержание, которое выражается в посылках и не должно-входить в общее заключение, варьировалось, т. е. видоизменялось от посылки к посылке, чтобы облегчить учащимся выявление того общего, неизменного, содержащегося во всех посылках, что и должно составлять содержание заключения. В приведенном выше примере частное содержание, которое должно варьироваться в посылках, это число десятичных знаков во множимом и множителе.  На отдельных этапах обучения, в частности в IV-V классах, обучение математике ведется преимущественно индуктивными методами. Здесь индуктивные заключения достаточно убедительны психологически и в большинстве остаются пока (на этом этапе обучения) недоказанными. Можно обнаружить лишь изолированные "дедуктивные островки", состоящие в применении несложных дедуктивных рассуждений в качестве доказательств отдельных предложений.  В дальнейшем обучении индукция уступает первенство дедукции. Однако она не исключается, меняется лишь ее роль. Если в IV-V классах она служит основным методом обучения, в дальнейшем она становится вспомогательным. С помощью индукции (или аналогии) мы открываем то, что подлежит доказательству дедуктивным путем.  Сочетание индукции с дедукцией в процессе обучения математике вполне правомерно. Когда говорят "математика - дедуктивная наука", то термин "математика" понимается здесь в смысле готовая, уже построенная теория (или совокупность таких теорий). Когда же речь идет о методах обучения математике, то здесь, имеется в виду привлечение самих учащихся к деятельности по построению системы математических знаний, разумеется, в той мере, в какой это им доступно под руководством учителя. В процессе же построения системы математических знаний наряду с дедукцией применяются и другие методы (наблюдение, опыт, индукция, аналогия и др.), в основе которых лежат правдоподобные рассуждения.  Приведем пример. Признак перпендикулярности прямой и плоскости - известная теорема стереометрии. Можно сообщить учащимся формулировку теоремы, изложить ее доказательство. Этот подход малоэффективен.  Можно поступить иначе. Определение перпендикулярности прямой к плоскости неэффективно: мы не можем проверить перпендикулярность данной прямой к любой прямой плоскости, таких прямых бесконечно много. Возникает задача: нельзя ли указать некоторое достаточное условие перпендикулярности прямой к любой прямой плоскости?  Возникает гипотеза: перпендикулярность к одной прямой плоскости. Но она быстро опровергается, можно построить модель прямой, перпендикулярной к одной прямой плоскости, но не перпендикулярной к другой.  Возникает другая гипотеза: перпендикулярность к двум прямым плоскости. Это уже кажется более правдоподобно (пока все учащиеся берут две пересекающиеся прямые плоскости). Однако и здесь обнаруживается противоречащий случай (если взять параллельные прямые плоскости, можно указать прямую, перпендикулярную им, но не перпендикулярную некоторой третьей прямой плоскости).  Наконец, формулируется уточненная гипотеза: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна любой прямой плоскости, т. е. и самой плоскости.  Таким путем мы открываем то, что подлежит дедуктивному доказательству.  Приведенный пример относится к курсу IX класса. Он подтверждает, что и на этом этапе обучения индуктивные методы не теряют своего значения. |  |
|  |  |  |
|  |  |  |