**Министерство образования Российской Федерации**

**Московский государственный университет печати**

Факультет *полиграфической технологии*

Дисциплина: Математика

Курсовая работа по теме:

**«Статистические методы обработки**

**Экспериментальных данных»**

Выполнил: студент

Курс 2

Группа ЗТПМ

форма *обучения заочная*

Номер зачетной книжки Мз 023 н

Вариант № 13

Допущено к защите

Дата защиты

Результат защиты

Подпись преподавателя

**Москва – 2010 год**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0;3 | 3;6 | 6;9 | 9;12 | 12;15 | 15;18 | 18;21 |
| 4 | 6 | 9 | 11 | 14 | 18 | 13 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 21;24 | 24;27 | 27;30 | 30;33 |
| 11 | 7 | 4 | 3 |

1. Построение интервального и точечного статистических распределений результатов наблюдений. Построение полигона и гистограммы относительных частот.

i – порядковый номер;

Ii – интервал разбиения;

xi – середина интервала Ii;

ni – частота (количество результатов наблюдений, принадлежащих данному интервалу Ii);

wi =  - относительная частота (n =- объём выборки);

Hi =  - плотность относительной частоты (h – шаг разбиения, т.е. длина интервала Ii).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **Ii** | **xi** | **ni** | **wi** | **Hi** |
| **1**  **2**  **3**  **4**  **5**  **6**  **7**  **8**  **9**  **10**  **11** | 0;3  3;6  6;9  9;12  12;15  15;18  18;21  21;24  24;27  27;30  30;33 | 1,5  4,5  7,5  10,5  13,5  16,5  19,5  22,5  25,5  28,5  31,5 | 4  6  9  11  14  18  13  11  7  4  3 | 0,04  0,06  0,09  0,11  0,14  0,18  0,13  0,11  0,07  0,04  0,03 | 0,01  0,02  0,03  0,04  0,05  0,06  0,04  0,04  0,02  0,01  0,01 |

Объём выборки:

n ==100,

wi = ni/100;

контроль: =1

Длина интервала

разбиения (шаг):

h = 3 ,

Hi = 

**∑ : 100 1,00**

*Статистическим распределением* называется соответствие между результатами наблюдений (измерений) и их частотами и относительными частотами. *Интервальное распределение* – это наборы троек (Ii ; ni ; wi) для всех номеров i, а *точечное* – наборы троек (xi ; ni ; wi). Таким образом, в таблице имеются оба – и интервальное, и точечное - статистическое распределения.

Далее, строим полигон и гистограмму относительных частот.

**Полигон.**

 **Гистограмма.**

**Гистограмма относительных частот**

0

0,01

0,02

0,03

0,04

0,05

0,06

0,07

0,08

0,09

0

3

**Интервалы частот**

**Плотность относительных частот**

3

#### Полигон относительных частот – ломаная, отрезки которой последовательно (в порядке возрастания xi) соединяют точки (xi ; wi). Гистограмма относительных частот – фигура, которая строится следующим образом: на каждом интервале Ii, как на основании, строится прямоугольник, площадь которого равна относительной частоте wi; отсюда следует, что высота этого прямоугольника равна Hi = wi/h – плотности относительной частоты. Полигон и гистограмма являются формами графического изображения статистического распределения.

**2.** **Нахождение точечных оценок математического ожидания и**

**дисперсии.**

В качестве точечных оценок числовых характеристик изучаемой случайной величины используются:

* для математического ожидания

 =  (*выборочная средняя*),

* для дисперсии

s2 =  (*исправленная выборочная*),

где n – объём выборки, ni – частота значения xi .

Таким образом, в статистических расчетах используют приближенные равенства

MX ≈  , DX ≈ s2 .

Нахождение точечных оценок математического ожидания и дисперсии по данным варианта осуществим с помощью расчетной таблицы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **xi** | **ni** | **xi ni** | **(xi - )2 ni** |
| **1**  **2**  **3**  **4**  **5**  **6**  **7**  **8**  **9**  **10**  **11** | 1,5  4.5  7,5  10,5  13,5  16,5  19,5  22,5  25,5  28,5  31,5 | 4  6  9  11  14  18  13  11  7  4  3 | 6  27  67,5  115,5  189  297  253,5  247,5  178,5  114  94,5 | 829,44  779,76  635,04  320,76  80,64  6,48  168,48  479,16  645,12  635,04  744,12 |

=  **=**

**хini/100 = 1590/100= 15,9**

s2 = =

=  **5324,04/99=53,78**

**∑ : 100 1590 5324,04**

**3.Выдвижение гипотезы о распределении случайной величины.**

При выдвижении гипотезы (предположения) о законе распределения изучаемой случайной величины мы опираемся лишь на внешний вид статистического распределения. Т.е. будем руководствоваться тем, что профиль графика плотности теоретического распределения должен соответствовать профилю гистограммы: если середины верхних сторон прямоугольников, образующих гистограмму, соединить плавной кривой, то эта линия представляет в первом приближении график плотности распределения вероятностей.

Итак, изобразим график и выпишем формулу плотности нормального (или гауссовского) распределения с параметрами а и , - ∞< а < + ∞,



Сравнение построенной гистограммы и графика плотности распределения приводит к следующему заключению о предполагаемом (теоретическом) законе распределения в рассматриваемом варианте исходных данных:

**Вариант 13 – нормальное (или гауссовское распределение)**

**4.Построение графика теоретической плотности распределения.**

Чтобы выписать плотность теоретического (предполагаемого) распределения, нужно определить значения параметров и а и подставить их в соответствующую формулу. Все параметры тесно связаны с числовыми характеристиками случайной величины, т.е.



MX = а ,

DX = σ2

Поскольку значения математического ожидания и дисперсии неизвестны, то их заменяют соответствующими точечными оценками, т.е. используют (уже упомянутые ранее) приближенные равенства MX ≈ , DX ≈ s2 , что позволяет найти значения параметров распределения.

По исходным данным была выдвинута гипотеза о нормальном распределении изучаемой случайной величины. Найдем параметры этого распределения:

\_

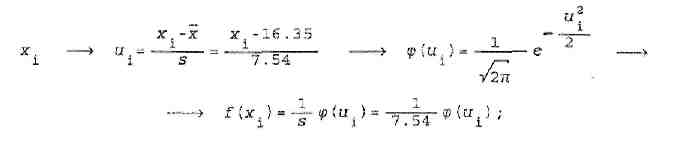
x = а, 15,9 = а, а=15,9

s2= σ2 53,78 = σ2 σ=7,33

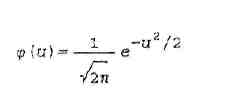
Следовательно, плотность предполагаемого распределения задается формулой

F(x)= [1/(7,33\*√2π)]\*e[-(x-15,9)2 / 2\*(7,33)2)]=0.054\*e^(0,009/((x-15,9)^2))

Теперь необходимо вычислить значения f(xi) плотности f (x) при x=xi (в серединах интервалов) Для этого воспользуемся следующей схемой:



значения фунцкии



при u=ui находятся, например, с помощью таблицы, имеющейся в любом учебнике или задачнике по теории вероятностей и математической статистике.

=15,9; s = 7,33

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **xi** | ui = xi- x / s | **φ(ui)** |  |
| 1,5  4,5  7,5  10,5  13,5  16,5  19,5  22,5  25,5  28,5  31,5 | -1,96  -1,56  -1.15  -0,74  -0.33  0.08  0.49  0,90  1.31  1,72  2.13 | 0,0584  0,1182  0,2059  0,3034  0,3778  0,3977  0,3538  0,2661  0,1691  0,0909  0,0413 | 0,008  0,016  0,028  0,041  0,052  0,054  0,048  0,036  0,023  0,012  0,006 |

Далее, на одном чертеже строим гистограмму и график теоретической плотности распределения: гистограмма была построена ранее, а для получения графика плотности наносим точки с координатами (xi ; f(xi)) и соединяем их плавной кривой.



****

**5.Проверка гипотезы о распределении с помощью критерия согласия Пирсона.**

Ранее была выдвинута гипотеза о законе распределения рассматриваемой случайной величины. Сопоставление статистического распределения (гистограмма) и предполагаемого теоретического (графика плотности) показывает наличие некоторых расхождений между ними. Поэтому возникает естественный вопрос: чем объясняются эти несовпадения? Ответить на него можно двояко:

1. Указанные расхождения несущественны и вызваны ограниченным количеством наблюдений и случайными факторами – случайностью результата единичного наблюдения, способа группировки данных и т.п. В этом случае выдвинутая гипотеза о распределении считается правдоподобной и принимается как не противоречащая опытным данным.
2. Указанные расхождения являются существенными (неслучайными) и связаны с тем, что действительное распределение случайной величины отличается от предполагаемого. В этом случае выдвинутая гипотеза о распределении отвергается как плохо согласующаяся данными наблюдений.

Для выбора первого или второго варианта ответа и служат так называемые критерии согласия. Словари толкуют слово критерий (от греч. kriterion – средство для суждения) как признак, на основании которого производится оценка, определение и классификация чего-либо.

Существуют различные критерии согласия: К. Пирсона, А.Н. Колмогорова, Н.В. Смирнова, В.И. Романовского и другие. Мы рассмотрим лишь один из них – критерий Пирсона, называемый также критерием χ2 («хи - квадрат»). (К. Пирсон (1857 - 1936) – английский математик, биолог, философ – позитивист.)

Критерий Пирсона выгодно отличается от остальных, во – первых, применимостью к любым (дискретным, непрерывным) распределениям и, во – вторых, простотой вычислительного алгоритма.

Правило проверки статистических гипотез с помощью критерия Пирсона будет объяснено на примерах.

**Группировка исходных данных.**

Применяется критерий Пирсона к сгруппированным данным. Предположим, что произведено n независимых опытов, в каждом из которых изучаемая случайная величина приняла определенное значение. Предположим, что вся числовая ось разбита на несколько непересекающихся промежутков (интервалов и полуинтервалов). Обозначим через νI количество результатов измерений (значений случайной величины), попавших в i-й промежуток. Очевидно, что ∑νI = n.

Отметим, что критерий χ2  будет давать удовлетворительный для практических приложений результат, если:

1. количество n опытов достаточно велико, по крайней мере n≥100;
2. в каждом промежутке окажется не менее 5…10 результатов измерений, т.е. νi ≥5 при любом i; если количество полученных значений в отдельных промежутках мало (меньше 5), то такие промежутки следует объединить с соседними, суммируя соответствующие частоты.

Пусть концами построенного разбиения являются точки zi , где z1 < z2 < … < zi – 1 , т.е. само разбиение имеет вид

(- ∞ ≡ z0; z1) , [ z1; z2) , [ z2; z3) , … , [ zi – 1; zi  ≡ + ∞).

После объединения соответствующих промежутков (последних двух) и замены самой левой границы разбиения на - ∞, а самой правой на + ∞ (поскольку на промежутки должна разбиваться вся числовая ось, а не только диапазон полученных в результате опыта значений), мы приходим к следующим интервальным распределениям, пригодным для непосредственного применения критерия Пирсона:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **zi –1; zi** | - ∞; 6 | 6;9 | 9;12 | 12;15 | 15;18 | 18;21 |
| **νi** | 10 | 9 | 11 | 14 | 18 | 13 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 21;24 | 24;27 | 27;30 |  | 30;+∞ |
| 11 | 7 | 4 |  | 3 |

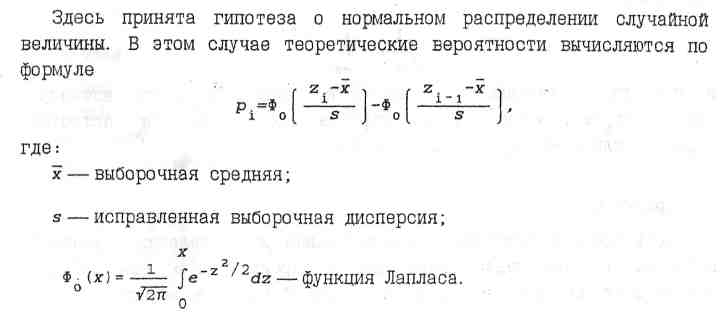


* 1. **Вычисление теоретических частот.**

Критерий Пирсона основан на сравнении эмпирических (опытных) частот с теоретическими. Эмпирические частоты νI определяются по фактическим результатам наблюдений. Теоретические частоты, обозначаемые далее , находятся с помощью равенства

 = n ⋅ pi ,

где n – количество испытаний, а pi ≡ Ρ (zi –1 < x < zi) - теоретическая вероятность попадания значений случайной величины в i-й промежуток (1 ≤ i ≤ 1).Теоретические вероятности вычисляются в условиях выдвинутой гипотезы о законе распределения изучаемой случайной величины.



Процедура отыскания теоретических вероятностей и частот показана в расчетной таблице: \_

**n = 100; а=x= 15,9; σ= s=7,33**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **Концы промежутков** | | **Аргументы фунцкции Ф0** | | **Значения функции Ф0** | | **Pi= Ф0(ui)- Ф0(ui-1)** | **ν1’=npi** |
| **zi -1** | **zi** | **Ui-1=**  **(zi-1-x)/s** | **Ui=**  **(zi-x)/s** | **Ф0(ui-1)** | **Ф0(ui)** |
| **1**  **2**  **3**  **4**  **5**  **6**  **7**  **8**  **9**  **10** | **-∞**  6  9  12  15  18  21  24  27  30 | 6  9  12  15  18  21  24  27  30  +∞ | -∞  -1,35  -0,94  -0,53  -0,12  0,29  0,70  1,11  1,51  1,92 | -1,35  -0,94  -0,53  -0,12  0,29  0,70  1,11  1,51  1,92  +∞ | -0,5000  -0,4115  -0,3264  -0,2019  -0,0478  0,1141  0,2580  0,3665  0,4345  0,4726 | -0,4115  -0,3264  -0,2019  -0,0478  0,1141  0,2580  0,3665  0,4345  0,4726  0,5000 | 0,0885  0,0851  0,1245  0,1541  0,1619  0,1439  0,1085  0,0680  0,0381  0,0274 | 8,85  8,51  12,45  15,41  16,19  14,39  10,85  6,80  3,81  2,74 |

**∑:** **1,0000** **100,00**

* 1. **Статистика χ2 и вычисление ее значения по опытным данным.**

Для того чтобы принять или отвергнуть гипотезу о законе распределения изучаемой случайной величины, в каждом из критериев согласия рассматривается некоторая (специальным образом подбираемая) величина, характеризующая степень расхождения теоретического (предполагаемого) и статистического распределения.

В критерии Пирсона в качестве такой меры расхождения используется величина

 ,

называемая *статистикой «хи - квадрат»* или  *статистикой Пирсона* (вообще, статистикой называют любую функцию от результатов наблюдений). Ясно, что всегда χ2 ≥0, причем χ2 = 0, тогда и только тогда, когда  при каждом i , т.е. когда все соответствующие эмпирические и теоретические частоты совпадают. Во всех остальных случаях χ2 ≠ 0; при этом значение χ2 тем больше, чем больше различаются эмпирические и теоретические частоты.

Прежде чем рассказать о применении статистики χ2 к проверке гипотезы о закон е распределения , вычислим ее значение для данного варианта; это значение, найденное по данным наблюдений и в рамках выдвинутой гипотезы, будем обозначать через χ2набл..

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i** | **νi** |  |  |
| **1**  **2**  **3**  **4**  **5**  **6**  **7**  **8**  **9**  **10** | 10  9  11  14  18  13  11  7  4  3 | 8,85  8,51  12,45  15,41  16,19  14,39  10,85  6,8  3,81  2,74 | 0,15  0,03  0,17  0,13  0,20  0,13  0,00  0,01  0,01  0,02 |

**: 100 100 0,85**

**χ2набл. = 0,85**

**5.4. Распределение статистики χ2.**

Случайная величина имеет χ2 – *распределение* с r *степенями свободы* (r = 1; 2; 3; …), если ее плотность имеет вид



где cr – которая положительная постоянная ( cr  определяется из равенства ). Случайная величина, имеющая распределение χ2 с *r* степенями свободы, будет обозначаться .

Для дальнейшего изложения важно лишь отметить, что, во – первых, распределение  определяется одним параметром – числом r степеней свободы и, во – вторых, существуют таблицы, позволяющие произвольно найти вероятность попадания значений случайной величины  в любой промежуток.

Вернемся теперь к статистике  . Отметим, что она является случайной величиной, поскольку зависит от результатов наблюдений и, следовательно, в различных сериях опытов принимает различные, заранее не известные значения. Понятно, кроме того, закон распределения статистики зависит: 1) от действительного (но неизвестного нам) закона распределения случайной величины, измерения которой осуществляются (им определяются эмпирические частоты ) ; 2) от количества произведенных наблюдений (от числа n) и от способа разбиения числовой оси на промежутки (в частности, от числа i ); 3) от теоретического (выдвинутого в качестве гипотезы) закона распределения изучаемой случайной величины (им определяются теоретические вероятности pi и теоретические частоты = n ⋅ pi )

Если выдвинутая гипотеза верна, то очевидно, закон распределения статистики  зависти только от закона распределения изучаемой случайной величины, от числа n и от выбора промежутков разбиения. Но на самом же деле, в этом случае (благодаря мастерски подобранному Пирсоном выражению для ) справедливо куда более серьезное утверждение. А именно, при достаточно больших n закон распределения статистики практически не зависит от закона распределения изучаемой случайной величины и ни от количества n произведенных опытов: *при * распределение статистики  *стремится к - распределению с r степенями свободы.* Эта теорема объясняет, почему статистика Пирсона обозначается через .

Если в качестве предполагаемого выбрано одно их трех основных непрерывных распределений (нормальное, показательное или равномерное), то r = i – 3, где i – количество промежутков, на которые разбита числовая ось (количество групп опытных данных). В общем случае



где - количество параметров предполагаемого (теоретического) распределения, которые заменены вычисленными по опытным данным оценками.

Т.е. в данном варианте после группировки исходных данных получаем количество промежутков разбиения i = 10, = 2, т.к. количество параметров предполагаемого (теоретического) распределения, которые заменены вычисленными по опытным данным оценками, = 2 – это *а* и σ для нормального распределения.

Следовательно

R=i-Nпар-1=10-2-1=7

* 1. **Правило проверки гипотезы о законе распределения случайной величины.**

Ранее отмечалось (и этот факт очевиден), что статистика  принимает только не отрицательные значения (всегда χ2 ≥0), причем в нуль она обращается в одном – единственном случае – при совпадении всех соответствующих эмпирических и теоретических частот (т.е. при  для каждого i).

Если выдвинутая гипотеза о законе распределения изучаемой случайной величины соответствует действительности, то эмпирические и теоретические частоты должны быть примерно одинаковы, а значит, значения статистики  будут группироваться около нуля. Если же выдвинутая гипотеза ложна, то эмпирические и соответствующие теоретические частоты будут существенно разниться, что приведет к достаточно большим отклонениям от нуля значений .

Поэтому хотелось бы найти тот рубеж – называемый *критическим значением* (или критической точкой) и обозначаемый через  , который разбил бы всю область возможных значений статистики  на два непересекающихся подмножества: *область принятия гипотезы,* характеризующаяся неравенством , и *критическую область* (или область отвержения гипотезы), определяемую неравенством .

##### Область принятия Критическая область

**гипотезы**

0  

Как же найти критическое значение  ?

Если выдвинутая гипотеза о законе распределения изучаемой случайной величины верна, то вероятность попадания значений статистики  в критическую область должна быть мала, так что событие {} должно быть практически неосуществимым в единичном испытании. Эта вероятность, обозначим ее через :



называется *уровнем значимости.*

Чтобы определить критическое значение , поступим следующим образом. Зададим какое – либо малое значение уровня значимости  (как правило = 0,05 или = 0,01) и найдем  как уровень уравнения



с неизвестной x. Поскольку распределение статистики  близко при ** к - распределению с r степенями свободы, то

и приближенное значение можно найти из уравнения



Геометрические соображения показывают, что последнее уравнение имеет единственное решение: его корень – это такое число x > 0, при котором площадь под графиком функции  (плотности- распределения) над участком  равна. На практике решение последнего уравнения находят с помощью специальных таблиц, имеющихся в любом руководстве по математической статистике; эти таблицы позволяют по двум входным параметрам – уровню значимости и числу степеней свободы r определить критическое значение . (Находимое таким образом критическое значение зависит, конечно, от и r,что при необходимости отражают и в обозначениях:  ).

Зададим уровень значимости как ** = 0,05** (условие курсовой работы) .

Подводя итоги, сформулируем **правило проверки гипотезы** о законе распределения случайной величины с помощью - критерия Пирсона:

1. Проводят n независимых наблюдений случайной величины (принято считать, что должно быть n ≥ 100).
2. Разбивают всю числовую ось на несколько (как правило, на 8…12) промежутков



так, чтобы количество измерений в каждом из них (называемое эмпирической

частотой ****) оказалось не менее пяти (т.е. **** ≥ 5 при каждом i).

1. Выдвигают (например, судя по профилю гистограммы) гипотезу о законе распределения изучаемой случайной величины и находят параметры этого закона (чаще всего, заменяя математическое ожидание и дисперсию их оценками).
2. С помощью предполагаемого (теоретического) распределения находят теоретические вероятности pi и теоретические частоты = n ⋅ pi попадания значений случайной величины в i-й промежуток.
3. По эмпирическим и теоретическим частотам вычисляют значения статистики , обозначаемое через χ2набл**..**
4. Определяют число r степеней свободы.
5. Используя заданное значение уровня значимости  и найденное число степеней свободы r, по таблице находят (на пересечении строки, отвечающей r, и столбца, отвечающего ) критическое значение .
6. Формулируя вывод, опираясь на *основной принцип проверки статистических гипотез*:

если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, т.е. если  , то гипотезу отвергают как плохо согласующуюся с результатами эксперимента;

если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, т.е. , то гипотезу принимают как не противоречащую результатам эксперимента.

* 1. **Вывод о соответствии выдвинутой гипотезы и опытных данных в варианте.**

Правило проверки выдвинутой гипотезы о законе распределения изучаемой случайной величины для данного варианта реализовано в таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| **Название величины** | **Обозначение и числовое значение величины** |
| Уровень значимости (задан в условии) | = 0,05 |
| Количество промежутков разбиения | l =10 |
| Число степеней свободы | r=7 |
| Критическое значение (находится по таблице) | = |
| Наблюдаемое значение критерия | χ2набл. = 0,85 |
| **ВЫВОД** | **Гипотеза не принимается для данного 9 варианта, поскольку  : 83,5 << 15,51** |

Замечания: 1. Заданное значение уровня значимости  = 0,05 означает, что

,

т.е. вероятность события {} очень мала. Однако это событие, обладая ненулевой вероятностью, и тогда (при  = 0,05 примерно в 5% случаев) будет отвергнута правильная гипотеза. Отвержение гипотезы, когда она верна, называется *ошибкой первого рода.* Таким образом, уровень значимости  - это вероятность ошибки первого рода. Отметим, что *ошибкой второго рода* называется принятие гипотезы в случае, когда она неверна.

2. Иногда вместо уровня значимости  задается *надежность* :



т.е.  - это вероятность попадания значений статистики  в область принятия гипотезы. Поскольку события

{} и 

противоположны, то

