Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

ГОУ ВПО «Марийский Государственный Университет»

Кафедра математики и МПМ

*Курсовая работа*

**Обратные тригонометрические функции**

**Выполнила:**

студентка

33 группы ЕНФ

Яшметова Л. Н.

**Научный руководитель:**

к.п.н. доцент

Бородина М. В.

Йошкар-Ола

2008

**Содержание**

Введение…………………………………………………………………………...3

Глава I. Определение обратных тригонометрических функций.

1.1. Функция *у = arcsin x*……………………………………………………........4

1.2. Функция *у = arccos x*…………………………………………………….......5

1.3. Функция *у = arctg x*………………………………………………………….6

1.4. Функция *у = arcctg x*…………………………………………………….......7

Глава II. Решение уравнений с обратными тригонометрическими функциями.

* 1. Основные соотношения для обратных тригонометрических функций….8
  2. Решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции……………………………………………………………………..11
  3. Вычисление значений обратных тригонометрических функций…..........21

Заключение……………………………………………………………………….25

Список использованной литературы…………………………………………...26

**Введение**

Во многих задачах встречается необходимость находить не только значения тригонометрических функций по данному углу, но и, обратно, угол или дугу по заданному значению какой-нибудь тригонометрической функции.

Задачи с обратными тригонометрическими функциями содержатся в заданиях ЕГЭ (особенно много в части В и С). Например, в части В Единого государственного экзамена требовалось по значению синуса (косинуса) найти соответствующее значение тангенса или вычислить значение выражения, содержащего табличные значения обратных тригонометрических функций. Относительно этого типа заданий заметим, что таких заданий в школьных учебниках недостаточно для формирования прочного навыка их выполнения.

Т.о. целью курсовой работы является рассмотреть обратные тригонометрические функции и их свойства, и научиться решат задачи с обратными тригонометрическими функциями.

Чтобы достичь цели, нам потребуется решить следующие задачи:

* Изучить теоретические основы обратных тригонометрических функций,
* Показать применение теоретических знаний на практике.

**Глава I. Определение обратных тригонометрических функций**

**1.1. Функция у = arcsin x**

Рассмотрим функцию ****,  . (1)

В этом промежутке функция  монотонна (возрастает от -1 до 1), следовательно, существует обратная функция

, . (2)

Каждому данному значению *у* (величины синуса) из промежутка [-1,1] соответствует одно вполне определенное значение *х* (величины дуги) из промежутка . Переходя к общепринятым обозначениям, получаем

, где . (3)

Это и есть аналитическое задание функции, обратной функции (1). Функция (3) называется *арксинусом* аргумента . График этой функции – кривая, симметричная графику функции , где , относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Приведем свойства функции , где .

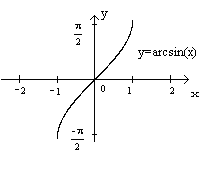
*Свойство 1.* Область изменения значений функции : .

*Свойство 2.* Функция  – нечетная, т.е. 

*Свойство 3.* Функция , где , имеет единственный корень .

*Свойство 4.* Если , то ; если <x, то .

*Свойство 5.* Функция  монотонна: при возрастании аргумента  от -1 до 1 значение функции возрастает от  до .



**1.2. Функция y = arсcos x**

Рассмотрим функцию , . (4)

В этом промежутке функция  монотонна (убывает от +1 до -1), значит, для нее существует обратная функция

, , (5)

т.е. каждому значению  (величины косинуса) из промежутка [-1,1] соответствует одно вполне определенное значение  (величины дуги) из промежутка [0,]. Переходя к общепринятым обозначениям, получаем

, . (6)

Это и есть аналитическое задание функции, обратной функции (4). Функция (6) называется *арккосинусом* аргумента *х*. График этой функции можно построить на основании свойств графиков взаимно обратных функций.

Функция , где , обладает следующими свойствами.

*Свойство 1.* Область изменения значений функции : .

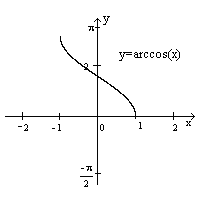
*Свойство 2.* Величины  и  связаны соотношением

= .

*Свойство 3.* Функция  имеет единственный корень .

*Свойство 4.* Функция  отрицательных значений не принимает.

*Свойство 5.* Функция  монотонна: при возрастании аргумента  от -1 до +1 значения функции убывают от  до 0.



**1.3. Функция y = arctgx**

Рассмотрим функцию , . (7)

Отметим, что эта функция определена для всех значений , лежащих строго внутри промежутка от  до ; на концах этого промежутка она не существует, так как значения  - точки разрыва тангенса.

В промежутке  функция  монотонна (возрастает от - до ), следовательно, для функции (1) существует обратная функция:

, , (8)

т.е. каждому данному значению  (величины тангенса) из промежутка  соответствует одно вполне определенное значение  (величины дуги) из промежутка .

Переходя к общепринятым обозначениям, получаем

, . (9)

Это и есть аналитическое задание функции, обратной (7). Функция (9) называется *арктангенсом* аргумента *х*. Отметим, что при  значение функции , а при  , т.е. график функции имеет две асимптоты:  и .

Функция , , обладает следующими свойствами.

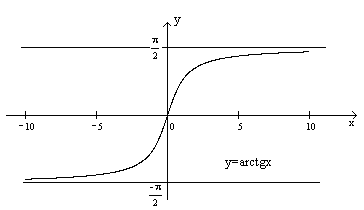
*Свойство 1.* Область изменения значений функции .

*Свойство 2.* Функция  – нечетная, т.е. .

*Свойство 3.* Функция  имеет единственный корень .

*Свойство 4.* Если , то ; если , то .

*Свойство 5.* Функция  монотонна: при возрастании аргумента от  до  значения функции возрастают от  до +.



**1.4. Функция y = arcctgx**

Рассмотрим функцию , . (10)

Эта функция определена для всех значений , лежащих внутри промежутка от 0 до ; на концах этого промежутка она не существует, поскольку значения  и  - точки разрыва котангенса. В промежутке (0,) функция  монотонна (убывает от  до ), следовательно, для функции (1) существует обратная функция

, , (11)

т.е. каждому данному значению  (величины котангенса) из промежутка () соответствует одно вполне определенное значение  (величины дуги) из промежутка (0,). Переходя к общепринятым обозначениям, получаем

, . (12)

Это и есть аналитическое задание функции, обратной (10). Функция (12) называется *арккотангенсом* аргумента .

График функции имеет две асимптоты:   и .

Функция , , обладает следующими свойствами.

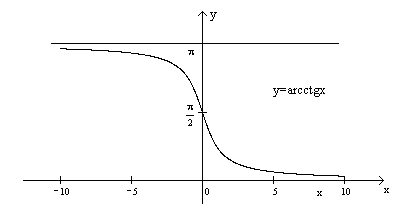
*Свойство 1.* Область изменения значений функции: .

*Свойство 2.* Величины  и  связаны соотношением .

*Свойство 3.* Функция  корней не имеет.

*Свойство 4.* Функция  отрицательных значений не принимает.

*Свойство 5.* Функция  монотонна: при возрастании  от  до  значения функции убывают от  до 0.



**Глава II. Решение уравнений с обратными тригонометрическими функциями**

**2.1. Основные соотношения**

Приведем 6 групп формул, которые могут значительно облегчить решение задач, содержащих основные тригонометрические функции:

1.  ;

;



 .

Формулы данной группы наиболее часто используются при решении тригонометрических уравнений.

2. 

***Вывод*:** По определению   и 

Заметим, что  По формуле приведения имеем



Итак, аргументы и заключены в отрезке  в котором синус монотонно возрастает от -1 до +1, и имеют одинаковый синус, равный . Следовательно, сами аргументы также равны, т.е.  откуда и получаем тождество 





3. 

***Вывод:*** Пусть  Тогда

 (1’)

Равенство (1’) вместе с исходным равенством равносильны следующим равенствам:

 (2’)

Эти равенства вытекают из самого определения обратных тригонометрических функций.

Так как левые части всех равенств (2’) равны между собой, то равны и их правые части.





4. 















5. 







6. 





**2.2. Решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции**

Традиционные способы решения уравнений с обратными тригонометрическими функциями (аркфункциями) сводятся к вычислению какой-нибудь тригонометрической функции от обеих частей с последующим преобразованием полученных суперпозиций по известным тригонометрическим формулам и формулам приведенных ниже:













 (13)







Формулы (13) легко выводятся из определений аркфункций и основных тригонометрических тождеств. Приведенные формулы можно дополнить подобными им формулами, полученными на основе двух тождеств

 (14)



и формул приведения.

Основным недостатком упомянутых способов решения является нарушение равносильности уравнения в процессе его преобразования, вследствие чего можно ожидать появления “лишних” корней. Выявление лишних решений путем подстановки в исходное уравнение зачастую вызывает большие трудности либо а) из-за сложности вычислений не табличных значений аркфункций, либо б) в связи с тем, что полученное множество решений бесконечно.

Существует метод решения уравнения с аркфункциями, в процессе которого “лишние” корни вообще не возникают. Метод реализуется в трех приводимых ниже подходах, которые различаются в зависимости от числа аркфункций, участвующих в уравнении.

***Подход(I):***Исходное уравнение содержит две аркфункции. Разнесем их в разные части уравнения. Зададим двумя неравенствами области изменения левой и правой части уравнения. Ввиду монотонности аркфункций эти неравенства легко разрешаются относительно аргументов указанных функций. Решение последней системы неравенств и определяет тот промежуток, которому принадлежат корни исходного уравнения.

***Задача 1.*** Решить уравнение



***Решение:*** Для сравнения воспользуемся сначала традиционной схемой решения.

ОДЗ:

Далее,



С учетом ОДЗ, 

В полученном интервале содержится бесконечное множество “лишних” решений, удаление которых превращается здесь в отдельную задачу.

Альтернативное решение, использующее метод (I):

Положим Так как  и  то исходное уравнение равносильно следующей системе:





***Ответ:***

***Задача 2.*** Решить уравнение



***Решение:*** Положим  Перепишем уравнение в виде:



Так как  то исходное уравнение равносильно системе:







***Ответ:*** 

***Задача 3.*** Решить уравнение



***Решение:*** Обозначим



Так как  и  то  и 

Уравнение принимает вид  причем

 и 

Так как - интервал монотонности тангенса, то уравнение  равносильно уравнению 

Переходя к уравнению



можно потерять те корни, для которых  и  не существует. В данном случае этого не произойдет, поскольку



А правые части существуют всегда. Получаем уравнение



которое после преобразований принимает вид



Так как уравнение  не имеет решений, то остается 

***Ответ:*** 

***Подход (II):*** Пусть исходное уравнение содержит более двух аркфункций. В этом случае равносильность преобразований сохраняется при использовании следующих схем решения:

(II.1) 

(II.2) 

При решении задач проверка неравенств  или  не вызывает сложностей и сводится к сопоставлению областей изменения входящих в уравнение аркфункций.

***Задача 4.*** Решить уравнение: 

***Решение:*** Положим  Исходное уравнение равносильно системе:



Так как  то достаточно убедиться, что 

Правое неравенство верно в силу границ изменения арктангенса. Левая часть неравенства следует из того, что  при 

***Ответ:*** 

***Задача 5.*** Решить уравнение: 

***Решение:*** Положим  Тогда исходное уравнение равносильно системе:

 (\*)

Последнее неравенство с очевидностью следует из неравенств  задающих промежутки изменения переменных. Поэтому система (\*) равносильна следующей системе: 

Корень первого уравнения системы  является решением исходного уравнения. После сокращения первого уравнения на  возводим его в квадрат.



Так как 

То 

***Ответ:*** 

***Задача 6.*** Решить уравнение 

***Решение:*** Пусть



Так как  то обе части уравнения лежат в интервале монотонности синуса. Поэтому уравнение равносильно такому:



или



После упрощений получим уравнение



имеющее единственный корень  Делаем проверку и убеждаемся, что  является корнем предыдущего уравнения и, следовательно, корнем исходного уравнения.

***Ответ:*** 

***Задача 7.*** Решить уравнение



***Решение:*** Введем обозначения



Данное уравнение принимает вид  или  Обе части уравнения лежат в интервале  Если взять котангенсы от обеих частей уравнения, то можно потерять лишь корень, которому соответствует значение углов, равное 0, так как это – единственное значение из интервала  в котором котангенс не существует. Проверим, будет ли выполняться равенство  Если  то откуда  и  При  получаем, что  Таким образом, - корень уравнения.

Если  то от обеих частей уравнения можно взять котангенсы:



Что приведет к следствию исходного уравнения. Раскрыв скобки и подставив выражения тригонометрических функций  и  через  получим уравнение



которое равносильно системе



Получаем два значения неизвестного:  Проверкой убеждаемся, что оба значения удовлетворяют данному уравнению.

***Подход (III):*** Для упрощения исходного уравнения во многих случаях удобно переходить от одних аркфункций к другим (например, от арксинуса или арккосинуса к арктангенсу). При этом, наряду с формулами (14), можно использовать следующие формулы:



 (15)





***Задача 8.*** Решить уравнение:



***Решение:*** Заметим, что  не удовлетворяет данному уравнению. Поэтому, в силу формул (15),





Итак, исходное уравнение можно записать в виде:



Если  то уравнение принимает вид:

 что невозможно.

Если  то и в этом случае уравнение

 решений не имеет, поскольку

 для 

***Ответ:*** нет решений.

***Задача 9.*** Решить уравнение 

***Решение:*** 



Из полученной системы следует, что  то есть  и  - числа одного знака. Действительно, если  то  и 

Если же  то из неравенств сразу следует, что  и  Следовательно, если  то уравнение решений не имеет.

Если  то уравнение также решений не имеет, так как



Пусть  и хотя бы одно из чисел не равно нулю. Тогда получим, что



Учитывая ограничения системы, получаем, что если  и хотя бы одно из чисел не равно нулю, то 

Если же  и хотя бы одно из чисел не равно нулю, то 

***Ответ:*** если  то уравнение решений не имеет; если  то уравнение решений не имеет; если  и хотя бы одно из чисел не равно нулю, то  если  и хотя бы одно из чисел не равно нулю, то 

***Задача 10.*** Решить систему уравнений 

***Решение:*** Используя формулы группы 2, получим:





Обращаясь к методам алгебраических систем уравнений, получим, что  и  являются корнями квадратного уравнения



Получим



***Ответ:***

**2.3. Вычисление значений обратных тригонометрических функций**

***Пример 1.*** Найдите  если 

***Решение:*** Оценим  если 

Имеем



 или 

Следовательно,





где  Окончательно получаем



***Ответ:*** 

***Пример 2.*** Докажите, что если  то 

***Решение:*** При  оба арксинуса существуют. Для первого это очевидно, а для второго имеем



Следовательно,



и, тем более,



Введем обозначение





Нужно доказать, что  или  Так как  то  и  лежат в интервале монотонности синуса. Поэтому, если мы докажем, что синусы этих аргументов равны, то тем самым будет доказано и равенство самих аргументов. Поскольку



(перед корнем взят знак плюс, так как  при ).

Итак, доказано, что  откуда следует справедливость равенства.

***Пример 3.*** Докажите, что выражение  не зависит от , если  и упростите его в этом случае.

***Решение:*** Так как  то  Введем обозначения



 т.е. 

Следовательно,



т.е. данное выражение лежит в интервале монотонности синуса. Найдем





 так как 

После подстановки получим



т.е. 

***Ответ:*** 

***Пример 4.*** Доказать равенство



***Решение:*** Обозначим слагаемое левой части через  Имеем



Поскольку  то 

***Пример 5.*** Доказать равенство



***Решение:*** Обозначим слагаемое левой части через  Имеем



Далее,  Учитывая, что  - острые углы, сделаем вывод, что 

**Заключение**

Данная курсовая работа содержит не только теоретический материал, но и практический (несколько примеров с решениями). В работе рассмотрены основные обратные тригонометрические функции, их свойства и графики; основные соотношения для обратных тригонометрических функций; задачи: вычисление значений обратных тригонометрических функций; доказательство равенств; решение уравнений и систем уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Так как в курсовой работе содержатся основы школьного курса математики по теме “Обратные тригонометрические функции”, то она будет полезна студентам педагогических вузов, учителям, школьникам, готовящимся к поступлению в вузы, учащимся школ и классов с углубленным изучением математики.



**Список использованной литературы**

1. Абрамович, М. И. Математика (геометрия и тригонометрические функции). Учеб. Пособие для подготовительных отделений вузов / Стародубцев, М. Т. – М.: «Высшая школа», 1976. -304с.
2. Бермант, А. Ф. Тригонометрия / Люстерник, Л. А. – М., 1967. – 176с.
3. Выгодский, М. Я. Справочник по элем. Математике. Таблицы, арифметика, алгебра, тригонометрия, функции и их графики. – Изд. 24-е. – М.: «Наука», 1976. – 416с.
4. Гараев, К. Г. Пособие по математике для поступающих в высшие учебные заведения / Исхаков, Э. М. – Казань: Татарское кн. изд-во, 1982. – 272с.
5. Зайцев, В. В. Элементарная математика. Повторительный курс / Рыжков, В. В. Сканави, М. И. – Изд. 2-е. – М.: «Наука», 1974. – 591с.
6. Калнин, Р. А. Алгебра и элементарные функции. – Изд. 8-е. – М.: «Наука», 1975. – 447с.
7. Новоселов, С. И. Специальный курс тригонометрии. Учеб. Пособие для педагогических институтов. – М.: «Советская школа», 1953. – 464с.
8. Обратные тригонометрические функции / В. Мирошин – М.: Чистые пруды, 2007. – 32с. – (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 4(16)).
9. Черняк, А. А. Математика в решениях задач из сборника М. И. Сканави. Справ. Пособие / Черняк, Ж. А. – Изд-е 7-е, стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 400с.
10. Шарыгин, И. Ф. Математика для поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1997. – 414с.