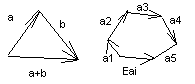
**1. Векторы. Действия над векторами.**

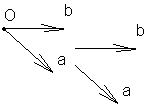
Вектором наз. упорядоченная совокупность чисел Х={X1,X2,...Xn} вектор дан в n-мерном пространстве. Т(X1,X2,X3). n=1,2,3. Геометрический вектор - направленный отрезок. |AB|=|a| - длинна. 2 вектора наз. коллинеарными, если они лежат на 1 прямой или ||-ных прямых. Векторы наз. компланарными, если они лежат в 1-ой плоскости или в ||-ных плоскостях. 2 вектора равны, когда они коллинеарны, сонаправленны, и имеют одинак-ую длинну.

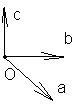
1.умножение на число: произведение вектора А на число λ наз. такой вектор В, который обладает след. св-ми: а) А||В. б) λ>0, то А↑↑В, λ<0, то А↑↓В. в)λ>1, то А<В, )λ<1, то А>В. 2. Разделить вектор на число n значит умножить его на число, обратное n: а/n=a\*(1/n).

3.Суммой неск-их векторов а и в наз. соединяющий начало 1-го и конец последнего вектора. 4. Разностью векторов а и в наз-ся вектор c, который, будучи сложенным с вектором в даст вектор а.

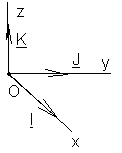
**2.3. Декартова прямоугольная система координат. Базис.**

Базисом на плоскости называется совокупность фиксированной точки и 2х неколлинеарных векторов, проведенных к ней.

Базисом в пространстве наз. совокупность фиксированной точки в пространстве и 3х некомпланарных векторов.

Любой вектор на плоскости может быть разложен по векторам базиса на плоскости. Любой вектор в пространстве может быть разложен по векторам базиса в пространстве.

ОС=OA+OB, OA=x\*i, OB=j\*y, OC=xi+yj. Числа х,у наз-ся координатами вектора ОС в данном базисе



**4. Действия над векторами.**

а=х1i+y1j+z1k; b=х2i+y2j+z2k

λ\*a=λ(х1i+y1j+z1k)= λ(х1)i+λ (y1)j+λ(z1)k

a±b=(x1±x2)i+(y1±y2)j+(z1±z2)k

ab=x1x2ii+y1x2ij+x2z1ki+x1y2ij+y1y2jj+ z1y2kj+x1z1ik+y1z2jk+z1z2kk=x1x2+y1y2+z1z2

ii=1; ij=0; и т.д.

скалярное произведение 2х векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

аа=x2+y2+z2=|a|2 a{x,y,z}, aa=|a|\*|a|, то a2=|a|2



ab=|a|\*|b|\*cosϕ



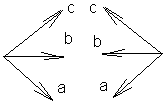
а)ав=0,<=>а⊥в, x1x2+y1y2+z1z2=0

б)а||в - коллинеарны, если , x1/x2=y1/y2=z1/z2

**5. Скалярное произведение векторов и его свойства.**

-(“skala”-шкала) 2х векторов а и в наз. число, равное произведению длин этих векторов на cos угла между ними. (а,в)- скалярное произведение. а\*в=|а|\*|в|\*cosϕ, ϕ=π/2, cosπ/2=0, a⊥b=>ab=0. Равенство “0” скаляргного произведения необходимое и достаточное условие их перпендикулярности (ортогональности).

**6. Векторное произведение 2х векторов.**



левая ----- правая

Тройка векторов а,в,с наз. правоориентированной (правой), если с конца 3го вектора с кратчайший поворот от 1го ко 2му вектору мы будем видеть против час. стрелки. Если кратчайший поворот от 1го ко 2му по час. стрелки - левая. Векторным произведением 2х векторов а и в наз. такой вектор с, который удовлетворяет условиям: 1. |c|=|a|\*|b|\*sinϕ. 2. c⊥a и c⊥b. 3. тройка а,в,с-правая.

**7. Смешанное произведение векторов и его свойства.**

Смешанным произведением векторов наз. векторно-скалярное произведение, являющееся числом: a\*b\*c=[a\*b]\*c=a\*[b\*c], где

a={ax,ay,az}

b={bx,by,bz}

c={cx,cy,cz}

Св-ва:  
1. При перестановке 2х сомножителей:

a\*b\*c=-b\*c\*a

2. не меняется при перестановке циклических сомножителей:

a\*b\*c=c\*a\*b=b\*c\*a

3.а)(Геометрич. смысл) необходимым и достаточным условием компланарности 3х векторов явл. равенство a\*b\*c=0

б)если некомпланарные вектора a,b,c привести к 1 началу, то |a\*b\*c|=Vпараллепипеда, построенного на этих векторах

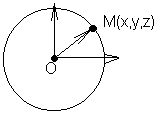
если a\*b\*c>0, то тройка a,b,c - правая

если a\*b\*c<0, то тройка a,b,c - левая



**8. Уравнение линии и поверхности.**

1. Уравнение сферы. Сфера- геометрическое место точек, равноудаленных от 1ой точки, называемой центром.

O(a,b,c)

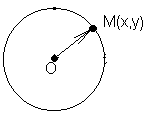
|OM|=r, OM={x-a,y-b,z-c}



r2=(x-a)2+(y-b)2+(z-c)2- уравнение сферы. x2+y2+z2=r2- ур-е сферы с центром точке(0,0).

F(x,y,z)=0- ур-е поверхности - ур-ю, удовлетворяющему координатам x,y,z любой точки, лежащей на поверхности.

2. Уравнение окружности

|OM|=r, OM={x-a,y-b)



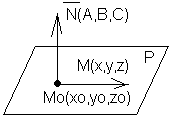
r2=(x-a)2+(y-b)2+(z-c)2- ур-е окружности

а=b=0, то x2+y2=r2

F(x,y)=0- ур-е линии на плоскости.

**9. Плоскость в пространстве.**

Ур-е в плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно заданному вектору.

N-вектор нормали

M0M{x-x0,y-y0,z-z0}

Для того, чтобы точка M∈P, необходимо и достаточно чтобы вектора N⊥M0M(т.е. N\*M0M=0)

A(x-x0)+B(y-y0)+С(z-z0)=0 - ур-е плоскости, проходящей через данную точку ⊥вектору.

**10. Общее уравнение плоскости.**

Ax+By+Сz-Ax0-By0-Сz0=0

-Ax0-By0-Сz0=D, где D=Ax+By+Сz

Ax+By+Сz+D=0

Частный случай:

Если D=0, то Ax+By+Сz=0(проходит ч/з 0;0)

Если A=0, то By+Сz+D=0

Если B=0, то Ax +Сz+D=0

Если C=0, то Ax+By+D=0

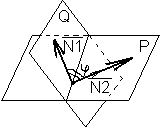
Если A=B=0, то Сz+D=0

Если A=C=0, то By+D=0

Если A=D=0, то By+Сz=0

Если B=D=0, то Ay+Сz=0

**11. Взаимное расположение плоскостей.**

****

N1,N2-нормальные векторы плоскости.

P:A1x+B1y+C1z+D1=0

Q:A2x+B2y+C2z+D2=0

P⊥Q{A1,B1,C1}

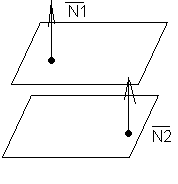
Q⊥N2{A2,B2,C2}



1)Пусть P⊥Q<=>N1⊥N2

A1A2+B1B2+C1C2=0 условие перпендикулярности P⊥Q.

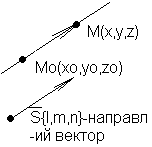
2) Пусть P⊥Q<=> N1⊥N2



A1/A2=B1/B2=C1/C2- Условие параллельности 2х плоскостей.

A1/A2=B1/B2=C1/C2=D1/D2- Условие совпадения 2х плоскостей.

**12. Каноническое уравнение прямой в пространстве.**



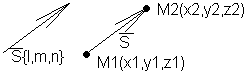
M0M{x-x0,y-y0,z-z0}

Чтобы точка М∈прямой(или лежала на ней) необх. и достаточно, чтобы M0M||S



**13. Уравнение прямой в пространстве, проходящей ч/з 2 заданные точки.**



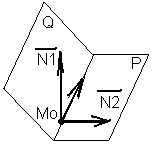


l m n

S{x2-x1,y2-y1,z2-z1}



**14. прямая, как пересечение плоскостей. Нахождение начальной точки и направляющего вектора прямой.**



P:A1x+B1y+C1z+D1=0

Q:A2x+B2y+C2z+D2=0

↑Общее ур-е прямой в пространстве.

Для того, чтобы перейти от общего к каноническому ур-ю прямой, надо задать начальную точку и направляющий вектор:

1. Найдем начальную точку:

Z=0 



M0(x0,y0,0), т.к. Z=0

2. Найдем направляющий вектор S-?

P⊥N1{A1,B1,C1}

Q⊥N1{A2,B2,C2}

S=N1\*N2

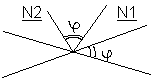


**16. Взаимное расположение прямой на плоскости.**

P:A1x+B1y+C1z+D1=0⊥N1{A1,B1}

Q:A2x+B2y+C2z+D2=0⊥N2{A2,B2}

а)



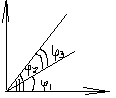
то 

б)

p↑↑q<=> N1||N2, то A1/A2=B1/B2

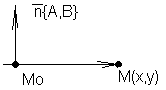
в)

p||q<=> N1⊥N2, то A1A2+B1B2=0

**17. Общее ур-е прямой линии на плоскости. Его частные случаи.**

Сначала запишем ур-е прямой, проходящей через заданную точку ⊥ заданному вектору.

M0(x0,y0)



M0M{x-x0,y-y0}

n\*M0M=0

A(x-x0)+B(y-y0)=0

Ax+By-Ax0-By0=0

-Ax0-By0=C

Ax+By+C=0-общее уравнение прямой на плоскости.

**18.19. Каноническое ур-е прямой линии на плоскости. Ур-е прямой, проходящей ч/з 2 точки. Ур-е с угловым коэффициентом.**





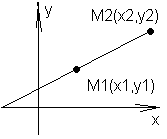
y-y1=k1(x-x1)

y=k1x-k1x1+y1

y1-k1x1=b

y=k1x+b

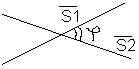
ур-е прямой с угловым коэффициентом k.

Пусть даны 2 точки M1(x1,y1), M2(x2,y2) и x1≠x2, y1≠y2. Для составления уравнения прямой М1М2 запишем уравнения пучка прямых, проходящих через точку М1: y-y1=k(x-x1). Т.к. М2лежит на данной прямой, то чтобы выделить ее из пучка, подставим координаты точки М2 в уравнение пучка М1: y-y1=k(x-x1) и найдем k:

Теперь вид искомой прямой имеет вид:

или:

- Ур-е прямой, проходящей ч/з 2

**20,21. Угол м/ду прямыми на плоскости. Условия || и⊥.**

а) 



S1{l1,m1} S2{l2,m2},



или

p:y=k1x+b1, k1=tgϕ1

q:y=k2x+b2, k2=tgϕ2 =>tgϕ=tg(ϕ2-ϕ1)=

=(tgϕ2-tgϕ1)/(1+ tgϕ1tgϕ2)=

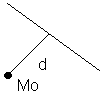
=(k2-k1)/(1+k1k2).

б) p||q, tgϕ=0, k1=k2

в)p⊥q,то 

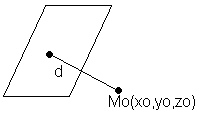
**22. Расстояние от точки до прямой на плоскости и до плоскости в пространстве.**

1. Ax+By+C=0, M0(x0,y0)





2. Пусть плоскость задана ур-ем Ax+By+Cz+D=0





**23. Кривые линии 2-го порядка.**

Кривые 2го порядка описываются с помощью общего ур-я:

Ax2+2Bxy+Cy2+2Dx+2Ey+F=0, где

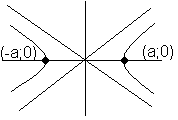


а) Каноническое ур-е эллипса

 - Каноническое ур-е эллипса

Если a=b, то x2+b2=a2 - ур-е окружности.

б) Ур-е гиперболы: x2/a2-y2/b2=1



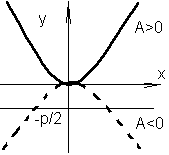
в) ур-е параболы: y2=2px или y=ax2

г) ур-е сферы: x2+y2+z2=а2 (r2=(x-a)2+(y-b)2+(z-c)2)

д) ур-е эллипса: x2/a2-y2/b2+z2/c2=1

**24. Парабола и ее свойства.**

Множество точек плоскости, координаты которых по отношению к системе декартовых координат удовлетворяет уравнению y=ax2, где х и у - текущие координаты, а- нек. число, наз. параболой.

Если вершина нах. в О(0,0), то ур-е примет вид

y2=2px-симметрично отн. оси ОХ

х2=2pу-симметрично отн. оси ОУ

Точка F(p/2,0) наз. фокусом параболы, а прямая x=-p/2 - ее директриса.

Любой точке М(х,у), принадлежащей параболе, расстояние до фокуса = r=p/2

Св-ва:

1. парабола предст. собой ∞ точек плоскости, равноотстающих от фокуса и от директрисы y=ax2.

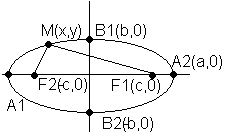
**25.Эллипс и его св-ва:**

Кривая второго порядка наз. эллипсом если коэффициенты А и L имеют одинаковые знаки

Аx2+Cy2=δ

ур.-е 

наз. канонич. ур.-ем эллипса, где   При а=в представляет собой ур-е окружности х2+y2=а2



Точки F1(-c,0) и F2(c,0) - наз. фокусами эллипса а.

Отношение ε=с/а наз. его эксцентриситетом (0<=ε<=1)

Точки A1,A2,B1,B2 -вершины эллипса.

Св-во:  
Для любой точки эллипса сумма расстояний этой точки до фокусов есть величина постоянной, =2а.

**26. Гипербола и ее св-ва.**

Кривая 2го порядка наз. гиперболой, если в ур-ии Ax2+Cy2=δ, коэффициент А и С имеют противоположные знаки, т.е. А\*С<0

б) Если δ>0, то каноническое ур-е гиперболы примет вид: x2/a2-y2/b2=1, F1(c,o) и F2(-c,0) - фокусы ее, ε>0, ε=c/a - эксцентриситет.

Св-во:  
для любой точки гиперболы абсолютная величина разности ее расстояний до фокусов есть величина постоянная = 2а.

б) если δ=0, ур-е примет вид x2/a2-y2/b2=0, получаем 2 перекрестные прямые х/а±у/b=0

в) если δ<0, то x2/a2-y2/b2=-1 - ур-е сопряженной гиперболы.

**27. Понятие о поверхностях 2го порядка.**

Алгебраическим ур-ем 2ой степени наз. ур-е вида Ax2+Bxy+Cy2+Dx+εy+F=0, где A,B,C,D,ε,F - действительные числа

Линии, которые в системе декартовых координат определяются алгебраическим ур-ем 2ой степени наз. линиями 2го порядка.

**28. Функции. Определение способа задания. Классификация функций. Основные элементарные функции.**

Функция - это зависимость одной величины от другой.

Если существует взаимооднозначное соответствие между переменной х одного множества и переменной у другого множества, то она называется функциональной зависимостью. y=f(x).

Определение способа задания:

-аналитически (y=kx+b)

-графический (график)

-таблично

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 3 |
| y | 4 | 5 | 8 |

-алгоритмически (с помощью ЭВМ)

Классификация функций:

Элементарные: - функции, которые получаются из основных элементарных ф-ций с помощью алгебраических действий (+,-,\*,/,введение в степень). Основные элементарные ф-ции:

1. y=xn - степенная

2. y=ax - показательная

3. y=logax - логарифмическая

4. y=sinx, y=cosx - тригонометрические.

Сложные:

Y=f(U), где U=ϕ(x), Y=f[ϕ(x)]

Если ф-ция у зависит от промежуточного аргумента U, который зависит от независимой переменной х, то y=f[ϕ(x)] называется сложным заданием х.

**29. Определение пределов последовательности и ф-ции. Осн. св-ва пределов ф-ции 1ой переменной.**

а) Предел последовательности:

y=f(Un), где U1,U2,...Un, а Un=n/(n2+1)

Предел: число а называется пределом переменной xn, если для каждого “+” как угодно малого числа ε(эпсилон) существует такой номер N, что при n>N разность |xn-a|<ε

limxn=a

n→∞

-ε<Xn-a<ε

a-ε<Xn<a+ε

б) Предел ф-ции:  
y=f(x) число а называется пределом переменной х, если разность м/ду ними есть б.м.в. |x-a|→0, |x-a|<ε

Число А называется пределом ф-ции f(x) при х→а, если для каждого, как угодно малого на период заданного числа ε. -ε>0, найдется такое как угодно малое на период заданного δ>0, что будут выполняться неравенства: Если |x-a|<δ, то |f(x)-A|<ε

Основные св-ва:  
1.Если величина имеет предел, то только 1.

2. limC=C, где С- постоянная величина

3. Если α-б.м.в., то limα=0

4. предела б.б.в. не существует

5. если limy=a, то y=a+α, где α-б.м.в.

**30. Основные теоремы о пределах.**

1. Предел суммы = суммы пределов:  
limx=a, limy=b, тогда x=a+α, y=b+β, где α и β - б.м.в. x+y=(a+α)+(b+β)=(a+b)+(α+β), где α+β=ω- б.м.в.

x±y=(a±b)+ω, то lim(x±y)=a±b=limx+limy.

2. Теорема о пределе производной: если сомножители имеют пределы, то и произведение имеет предел, равный произведению пределов сомножителей.

limx=a, limy=b, то на основании 5го св-ва

x=a+α

y=b+β, где α и β - б.м.в.

x\*y=(a+α)\*(b+β)=a\*b+(αb+aβ+αβ), то

↑сумма б.м.в. = δ(дельта)

xy=ab+δ

xy→ab,

limxy=ab=limx\*limy

3. Следствие: постоянная величина выноситься за знак предела.

limCx=limC\*limx=C\*limx

4. Предел от частного = частному пределов (кроме limx/limy=0

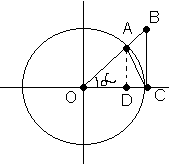
limx/y=limx/limy, т.к. limx=a, limy=b

x=a+α, y=b+β

x/y=(a+α)/(b+β)

**31. 1й, 2й замечательный пределы.**

**1й: limsinx/x=1, limx/sinx=1. x→0**

j

lim((Sinα)/α)=1

x→0

SΔOAC<SсектораOAC<SΔOCB

SΔOAC=1/2\*OC\*AD, OA=OC=1, то

SΔOAC=1/2\*OC\*OA\*Sinα=1/2\*Sinα

SсектораOAC=1/2\*OA\*OC\*α=1/2\*α(т.к. OA=OC)

SΔOCB=1/2\*OC\*BC=1/2\*OC\*OC\*tgα=1/2\*tgα

1/2\*Sinα<1/2\*α<1/2tgα //\*2

sinα<α<tgα//:sin

1<α/sinα<1/cosα, =>cosα<sinα/α<1,

limCosα<lim((Sinα)/α)<lim1, по признаку

α→0 α→0 существования

предела ф-ции

lim((Sinα)/α)=1

α→0

2ой: lim(1+1/n)n=e≈2.7183

n→∞

Зная, что 1/n=α - б.м.в., то n=1/α и

x→∞ α→0

lim(1+1/n)1/α=e

α→0

**32. Основные приемы нахождения пределов.**

1. Подстановка: при х→х0 и х0∈области определения ф-ции f(x), предел ф-ции f(x)= его частному значению при х=х0

limf(x)=f(x0)

x→x0

2. Сокращение: при х→∞ и х→х0 f(x)/g(x)=0/0, то сокращают числитель и знаменатель на множитель, стремящийся к 0.

3. уничтожение иррациональности (\* числитель и знаменатель на 1 число).

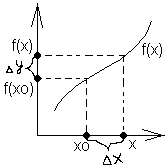
4.деление на наивысшую степень х: при х→∞ и х→х0 f(x)/g(x)=0/0, то делим числитель и знаменатель на наивысшую степень.

5. сведение к известным пределам: lim((Sinx)/x)=1

x→∞

lim(1+1/n)x=e

x→∞

**33. Непрерывность ф-ции в точке и на интервале.**

x=x0+Δx, Δx=x-x0

Δy=f(x0+Δx)-f(x0)

Ф-ция y=f(x) наз. непрерывной в точке x0, если она определена в окрестности этой точки, а limΔy=0. (б.м. приращению аргумента соответствует б.м. приращению ф-ции).

limΔy=lim[f(x)-f(x0)]=limf(x)-limf(x0)=0, то

limf(x)=limf(x0)

x→x0

Ф-ция непрерывна в точке х0, если ее предел = значению этой ф-ции в точке х0

Ф-ция явл. непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой его точке.

**34. Признаки существования а) предела ф-ции и б) предела последовательности.**

а) если все значения ф-ции f(x) заключены между значениями ф-ции ϕ(x) и g(x), которые имеют 1 предел при х→а, то и limf(x)=A

ϕ(x)<=f(x)<=g(x), где limϕ(x)=А, limg(x)=А, то limf(x)=A. х→а

б) Если последовательность монотонно возрастает и ограниченна сверху, то она имеет предел.

Последовательность монотонно возрастает, если последующий член>предыдущего (xn+1>xn)

Последовательность ограничена сверху, если существует такое М, что xn<=M.

**35. Бесконечно малые величины и их св-ва:**

величина называется б.м.в. в каком-то процессе, если она в этом процессе бесконечно уменьщается.(ρ=m/V, если V→∞, то ρ→0)

Св-ва б.м.в.:

-сумма или разность конечного числа б.м.в. есть б.м.в. (α и β-б.м.в., то α±β=б.м.в.)

-произведение б.м.в. на величину ограниченную есть б.м.в. (U<=M, то α\*U=б.м.в.)

-произведение б.м.величин=б.м.в.

-произведение б.м.в. на постоянную = б.м.в

**36. Бесконечно большие величины и их св-ва.**

б.б.в - величина для которой |Xn|→∞ (при xn=1/n, n→0, то xn→∞)

Св-ва:

-величина обратная б.б.в. явл. б.м.в. (1/∞=0; 1/0=∞)

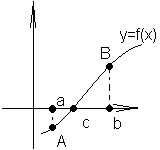
-сумма б.б.в. (с одинаковым знаком) есть б.б.в.

-произведение 2х б.м.величин=б.м.в.

-частное от деления 2х б.б.в = неопределенность

**38. Св-ва непрерывных ф-ций:в  
в отрезке:**

1. Если ф-ция y=f(x) непрерывна на [a,b] и f(a)\*f(b)<0, т.е. знаки f(a) и f(b) противоположны, то на (a,b) найдется хотя бы одна точка х=с, что f(c)=0 (график)-теорема Больцана-Коши.

2. Если ф-ция y=f(x) непрерывна на [a,b], то она ограничена на этом промежутке.

3. Если ф-ция y=f(x) непрерывна на [a,b], то она достигает на этом отрезке min m и max M (теорема Вейерштрасса).

в точке:

1. если ф-ция f(x) и g(x) непрерывна в х0, то их сумма, произведение, частное (при ϕ(х0)≠0) явл-ся ф-циями, непрерывными в х0

2. если ф-ция y=f(x) непрерывна в х0, и f(x0)>0, то существует окрестность х0, в которой f(x)>0

3. если y=f(U) непрерывна в U0, а U=ϕ(x) непрерывна в U0=ϕ(x0), то сложная ф-ция y=f[ϕ(x)] непрерывна в х0.

**39. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной и ее геометрический смысл.**

1. νcp.=ΔS/Δt, ν=lim(ΔS/Δt), где Δt→0

2. pcp.=Δm/Δl, pT=lim(Δm/Δl), где Δl→0

Δy=f(x+Δx)-f(x), y=f(x)

lim(Δy/Δx)=lim((f(x+Δx)-f(x))/Δx)

Δx→0 Δx→0

Смысл производной - это скорость изменения ф-ции при изменении аргумента.

y=f(x+Δx)-f(x), y=f(x). производной в точке а называется предел отношения приращения ф-ции к приращению аргумента:

lim(Δy/Δx)=lim((f(x+Δx)-f(x))/Δx)=dy/dx

Δx→0 Δx→0

Вычисление производной: lim(Δy/Δx)=y` Δx→0

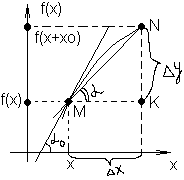
1) если y=x, Δy=Δx, y`=x=lim(Δy/Δx)=1.

2) если y=x2, Δy=(x+Δx)2-x2=x2+2xΔx+Δx2-x2=Δx(2x-Δx),

(x2)`=lim((Δx(2x+Δx))/Δx)=lim(2x+Δx)=2x

x→0 Δx→0

Геометрический смысл производной.

KN=Δy, MK=Δx

ΔMNK/tg2=Δy/Δx

вычислим предел левой и правой части:

limtgα=lim(Δy/Δx) Δx→0

tgα0=y`

α→α0

При Δx→0 секущая MN→занять положение касательной в точке M(tgα0=y`, α→α0)

Геометрический смысл производной заключается в том, что есть tg угла наклона касательной, проведенной в точке x0.

**40. Основные правила дифференцирования.**

Теорема: Если f(x) и g(x) дифферен. в точке х, то: 

Теорема о произв. сложной функции:

Если y(x)=f(u(x)) и существует f’(u) и u’(x), то существует y’(x)=f(u(x))u’(x).

Теорема о произв. обратной функции.



Таблица производных:



**41. Дифференцирование сложных ф-ций:**

Производная сложной ф-ции = произведению производной ф-ции по промежуточному аргументу и производной самого промежуточного аргумента по независимой переменной.

y`=f(x)\*U`,или yx`=yU`\*Ux`, или dy/dx=dy/dU=dU/dx

Например:



**42. Дифференцирование обратной ф-ции.**

y=f(x), то x=ϕ(y) - обратная ф-ция.

Для дифференцируемой ф-ции с производной, не = 0, производная обратной ф-ции = обратной величине производной данной ф-ции, т.е. xy`=1/yx`.

Δy/Δx=1/(Δy/Δx) - возьмем предел от левой и правой части, учитывая, что предел частного = частному пределов:

lim(Δy/Δx)=1/(lim(Δy/Δx), т.е. yx`=1/xy или f`(x)=1/ϕ`(x)

Например:



**43. Производные степенных и тригонометрических функций.**

Основные формулы: 

**44. Производные обратных тригонометрических функций.**

Основные формулы: 

Для сложных функций:



**45. Производные показательных и логарифмических функций.**

Основные формулы:



Если z=z(x) – дифференцируемая функция от x, то формулы имеют вид:



**46. Логарифмическое дифференцирование. Вывод производной степенной ф-ции.**

y=ax - показательная ф-ция, y=xn - степенная, y=xx - показательно-степенная.

y=[f(x)]ϕ(x) - показательно-степенная ф-ция.

lny=xlnx - найдем производную от левой и правой части, считая у ф-цией х.

(1/y)\*y`=(lny)

(x\*lnx)`=x`lnx+x\*(lnx)`=lnx+1

y`=y\*(lnx+1)=xx(lnx+1)

Операция, которая заключается в последовательном применении к ф-ции y=f(x) сначала логарифмирование, а затем дифференцирование.

Степенная ф-ция:

1.y=xn, nlnx, y`/y=n/x=n\*(x)-1

y`=y\*n\*(x-1)=n\*xn\*x-1=n\*xn-1

2.y=eU, где U=sinx

U`=cosx, y`=(eU)`=eU\*U`=esinx\*cosx.

**47. Производная высших порядков ф-ции 1й переменной.**

y=f(x)

y``=(y`)`=lim((f`(x+Δx)-f`(x))/Δx)

x→0

y```=(y``)`= lim((f``(x+Δx)-f``(x))/Δx)

f(n)(x)=[f(n-1)(x)]`

**48. Производные 1,2-го порядка неявных ф-ций.**

Неявной называется такая ф-ция у аргумента х, если она задана уравнением F(x,y)=0, не разрешенным относительно независимой переменной.

y=f(x), y=x2-1 - явные

F(x,y)=0, a2=x2+y2 - неявные ф-ции.

1)a2=x2+y2 - найдем производную, продифференцируем, считая у - сложной ф-цией х.

y`=2x+2y=0, т.к. а- постоянная

y\*y`=-x, y`=-x/y

2) x3-3xy+y3=0

3x3-3(xy)`+3y2\*y`=0 //:3

x2-(x`y+y`x)+y2\*y`=0

y`y2-xy`=y-x2

y`=(y-x2)/(y2-x)

**49. Дифференциал ф-ции и его геометрический смысл. Св-ва дифференциала.**

limy=A, y=A+α

limΔy/Δx=y`, Δy/Δx=y`+α, Δy=y`Δx+αΔx

Δx→0

Δy=y`Δx+ε, где ε-б.м.в., величина более высокого порядка малости,, чем Δx(α), и ее можно отбросить.

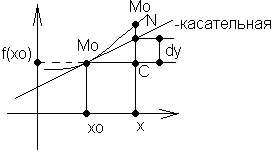
dy=y`Δx

Дифференциалом ф-ции наз. величина, пропорциональная б.м. приращению аргумента Δх и отличающаяся от соответствующего приращения ф-ции на б.м.в. более высокого порядка малости, чем Δх.

Если y=x, то dy=dx=x`Δx=Δx, dx=Δx

Если y≠x, то dy=y`dx, y`=dy,dx

Геометрический смысл: дифференциал - изменение ординаты касательной, проведенной к графику ф-ции в точке (x0,f(x0)) при изменении x0 на величину Δx



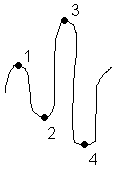
Св-ва:  
1. (U±V)`=U`±V`, то (U±V)`dx=U`dx±V`dx, d(U±V)=d(U±V)

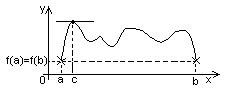
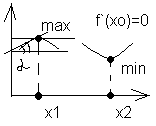
2. (UV)`=U`V+V`U, то (UV)`dx=V`dU+U`dV

3.d(c)=c`dx=0\*dx=0

4. d(U/V)`=(V`dU-U`dV)/V2.

**50.Теорема Ролля.**

Если функция f(x) непрерывна на заданном промеж/ [a,b] деффер. на интервале (a,b) f(a)=f(b) то существует т. **с** из интерв. (a,b), такая, что f’(c)=0.



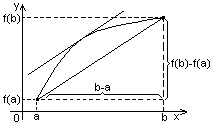
**51. Теорема Лагранжа.**

Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и дефференцирована на (a,b), то сущест.

т. с(a,b), такая, что: f(b)-f(a)=f’(c)(b-a).

**Доказательство:** применим т.Коши, взяв только g(x)=x, тогда g’(x)=1≠0.





**52. Теорема Коши.**

Если f(x), g(x) удовл. трем условиям:

1). f(x), g(x) непрерыв. на промеж [a,b]

2). f(x), g(x) деффер. на интервале (a,b)

3). g’(x)≠0 на интер. (a,b), то сущ. т. **с**



g(b)≠g(a) (неравны по теореме Ролля).



1). F(x) – непрерывна на [a,b]

2). F(x) – деффиренцирована на (a,b)

3). F(a)=0 ; F(b)=0

по теореме Ролля сущ. с∈(a,b); F’(с)=0









**53. Необходимые и достаточные признаки монотонности ф-ции:**

Если x2>x1, f(x2)>f(x1), то ф-ция монотонно возрастает

Если x2>x1, f(x2)<f(x1), то ф-ция монотонно убывает

Монотонность - постоянство

Необходимые признаки:1)если ф-ция f(x) всюду в интервале возрастает, то ее производная в этом интервале неотрицательна (f`(x)>=0)

2)если ф-ция f(x) всюду в интервале убывает, то ее производная в этом интервале неположительная (f`(x)<=0)

3)если ф-ция f(x) всюду в интервале постоянна, то ее производная в этом интервале =0 (f`(x)=0)

Достаточные признаки монотонности: 1)если f`(x) в интервале положительна, то ф-ция f(x) возрастает в этом интервале.

2)если f`(x)<0, то ф-ция f(x) возрастает в этом интервале.

3)если f`(x)=0, то ф-ция f(x)=const на интервале.

x1<a<x2, x2-x1>0, x2>x1

1. если f`(a)>0, то f(x2)>f(x1)

2. если f`(a)<0, то f(x2)<f(x1)

3. если f`(a)=0, то f(x2)=f(x1)

**54. Экстремумы ф-ций. Признаки существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значение ф-ции 1й переменной.**

Точка х называется точкой max ф-ции, если значение ф-ции в этой точке - наименьшее в некоторой ее окрестности.

1- локальный max

2- локальный min

3- глобальный max

4- глобальный min

если tgα>0, то f`(x)>0

если tgα<0, то f`(x)<0

Необходимый признак экстремума: ф-ия f(x) может иметь max и min только в тех точках, в которых f`(x)=0 или не существует.

(В них можно построить ∞ касательных).

Достаточный признак: точка х0 является точкой экстремума, если ее производная в этой точке меняет знак:

- если с “+” на “-”, то х0- т. max

- если с “-” на “+”, то х0- т. min

**55. Выпуклость и вогнутость линий точки перегиба.**

Линия называется выпуклой, если она пересекается с любой своей секущей не более чем в 2х точках.

Линия наз-ся вогнутой, если она целиком лежит по 1 сторону от касательной, проведенной в любой ее точке.

Точка перегиба - точка, отделяющая выпуклый участок дуги от вогнутого.

Необходимый признак выпуклости и вогнутости: если линия на интервале выпуклая, то ее 2я производная <=0; если линия на интервале вогнутая, то ее f``(x)>=0

Достаточный признак: если f``(x) всюду в интервале “-”, то линия в интервале выпуклая; если f``(x)>0, то линия вогнутая

Признаки точки перегиба: чтобы X0 была т. перегиба, <=> чтобы у`` в этой точке = 0 и меняла знак при переходе х через х0.

**56. Асимптота графика ф-ции.**

Асимптота - прямая, к которой график ф-ции стремится, но никогда ее не пересекает.

1) прямая х=х0 назыв-ся вертикальной асимптотой графика ф-ции f(x)=y, если при х→х0 |f(x)|→+∞ (вида x=b)

2) y=kx+b, ,y=f(x) - общее ур-е наклонной асимптоты

lim[f(x)-(kx+b)]=0, f(x)=kx+b+α(б.м.в.) по св-ву x→∞ пределов.

разделим левую и правую части на х. Возьмем предел при х→∞

f(x)/x=k+b/x+α/x, lim(f(x)/x)=limk+lim(b/x)+lim(α/x)

x→∞

, то

k=lim(f(x)/x)

b=lim[f(x)-kx]

Если эти пределы существуют, то существует и наклонная ассимптота вида kx+b=y

3)k=lim(f(x)/x)=0, y=b - горизонтальная асимптота.

**57. Предел и непрерывность ф-ции нескольких переменных.**

Величина U наз-ся ф-цией переменных (x1,x2...xn), если каждой, рассматриваемой в совокупности этих величин соотв-ет 1 определенное значение величины U.

Пусть f(M)=M0(x10, x20,... xn0), M(x1, x2,... xn)

Ф-ция f(M)=f(x1, x2,... xn) имеет предел А при М0→М, если каждому значению как угодно малого числа δ(дельта) соотв-ет, как угодно малое заданное число ε>0, если |M0M|=δ, то |f(M)-A|<ε

Ф-ция f(M) наз-ся непрерывной в точке М0, если б.м. приращению любого аргумента соответствует б.м. приращение ф-ции.

limf(x10, x20,... xn0)=limf(x1, x2,... xn)

x10 → x1

x20 → x2

xn0 → xn

**58. а) Частная производная ф-ции нескольких переменных. б) Частный и полный дифференциалы.**

а) рассмотрим на примере ф-ции 2х переменных

x=f(x,y), точка A(x0,y0)

Δz=f(x0+Δx, y0+Δy)-f(x0,y0) - полное приращение.

Частное приращение по х (по у):

ΔxZ=f(x0+Δx, y)-f(x0, y0)

ΔyZ=f(y0+Δy, x)-f(x0, y0)

Частная производная ф-ция:  
б) dxZ=Zx`\*Δx=∂Z/∂x\*dx; dxZ=Zy`\*Δy=∂Z/∂y\*dy

Полный дифференциал dZ=dxZ+dyZ=Z`xdx +Z`ydy

dZ=∂Z/∂x\*dx+=∂Z/∂y\*dy

Чтобы найти полный дифференциал ф-ции надо найти частные производные от этой ф-ции по всем независимым переменным, умножить их на дифференциал этих переменных, рез-ты сложить.

**59. Производная 2го порядка ф-ции нескольких переменных. Дифференцирование сложной ф-ции 2х переменных.**

Частное производной 2го порядка от ф-ции Z явл. частная производная от 1й производной:

Z``XX=(Z`x)`x ; Z``yy=(Z`y)`y

Z``Xy=(Z`x)`y=(Z`y)`x







**60. Экстремумы ф-ции нескольких переменных. Необходимые и достаточные признаки экстремума ф-ции 2х переменных.**

Z=f(x,y), M0(x0,y0), M(x,y)

Max ф-ции Z называется такое ее значение f(x0,y0), которое является наибольшим среди всех значений, принимаемых в некоторой окрестности точки M0

Min ф-ции Z называется такое ее значение f(x0,y0), которое является наименьшим среди всех значений, принимаемых в некоторой окрестности точки M0

Экстремум сущ. в тех точках, в которых частная производная ф-ции Z=0 или не существует:



Если Z=f(x1,x2,...xn), то ∂Z/∂xi=0, i=1,2,...n - необходимое условие.

Достаточный признак:



где A= Z``XX(x0,y0), C= Z``yy(x0,y0), B= Z``yx (x0,y0),

1) если Δ>0, то М0 - точка экстремума;

если А<0 или С<0, то М0 - точка max;

если А>0 или С>0, то М0 - точка min.

2) если Δ<0, то экстремума нет

3) если Δ=0, то вопрос о существовании экстремума остается открытым.

**61. Общая схема исследования ф-ции необходима для построения графика.**

Найти:  
-обл. определения ф-ции

-точки разрыва и интервалы, где ф-ция явл-ся непрерывной

-поведение ф-ции в окрестностях точки разрыва, вертикальной асимптоты

-т. пересечения графика с осями координат

-симметрия графика (чет./нечет):

f(-x)=x симметрична относительно осей

f(-x)=-x симметрична относительно О(0,0)

-периодичность

-интервалы монотонности

-точки экстремума

-наибольшее и наименьшее значение

-выпуклость, вогнутость

-точки перегиба

-поведение ф-ции в безконечности, наклонная и горизонтальные асимптоты

-нанесение на график.