**Содержание**

Введение…………………………………………………………………………...3

Историческая справка…………………………………………………………….4

ГЛАВА 1. Простейшие геометрии аффинного типа

1. Теоретико-групповой подход к геометрии…………………………5
2. Эквиаффинная система……………………………………………...9
3. Аффинные преобразования и их свойства………………………..11
4. Подобие как частный случай аффинного преобразования………13

ГЛАВА 2. Геометрия Галилея и дуальные числа

1. Определение геометрии Галилея…………………………………..15
2. Расстояние между точками………………………………………...19
3. Окружность………………………………………………………….21
4. Угол между прямыми………………………………………………22
5. Треугольник………………………………………………………...25
6. Дуальные числа и операции над ними……………………………33
7. Изображение дуальных чисел……………………………………...39
8. Решение задач……………………………………………………….

Заключение……………………………………………………………………….45

Литература……………………………………………………………………….46

**Введение**

Планиметрия — наука о свойствах фигур плоскости, инвариантных относительно движений плоскости. Фигуры, которые можно совместить движениями, геометрия считает равными и не различает. Всем известны движения евклидовой планиметрии: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия. Если изменить группу движений, например, добавить преобразования подобия, то изменится и геометрия. В определённом смысле любая группа преобразований порождает свою геометрию.

Целью работы является пробуждение интереса учителей к теории дуальных чисел и геометрии Галилея, а также рассмотрение простейших геометрий аффинного типа.

Достижение цели предусматривает решение следующих задач:

* подобрать и изучить литературу, содержащую материал по теме;
* познакомиться с основными понятиями и определениями геометрии Галилея;
* рассмотреть материал о дуальных числах, действиях над ними и их геометрическую интерпретацию;
* сравнить геометрию Галилея с геометрией плоскости дуальных чисел.

В данной работе рассматривается в начале общая классификация форм преобразований плоскости с примерами и, далее, одна из неевклидовых геометрий – геометрия Галилея. В чём-то эта странная геометрия отличается от евклидовой, а в чём-то похожа на неё.

Работа состоит из двух глав.

В первой главе рассматриваются геометрии аффинного типа в следующем порядке: теоретико-групповой подход к геометрии, эквиаффинная система, аффинные преобразования и их свойства, подобие как частный случай аффинного преобразования.

Во второй главе логическим продолжением этой темы является знакомство с геометрией Галилея и дуальными числами в следующей последовательности: определение геометрии Галилея, задание расстояния между точками, окружность, угол между прямыми, треугольник, дуальные числа и операции над ними, изображение дуальных чисел, также показано решение 17 задач.

**Историческая справка**

Отдельно необходимо поднять вопрос о наименовании геометрической системы. В научной литературе рассмотренная ниже геометрия именуется «полуевклидовой», «флаговой», «параболической», «изотропной» или «галилеевой»; однако ни одно из этих названий нельзя признать полностью удачным. Термины «флаговая геометрия», «параболическая геометрия» (или «дважды параболическая геометрия») и «изотропная геометрия» оправдываются обстоятельствами, которые никак не могут быть раскрыты в элементарном сочинении, рассчитанном на лиц, не обладающих серьезной математической подготовкой. Достоинством термина «полуевклидова геометрия» является его близость к названию «псевдоевклидова геометрия», принятому для геометрии, связанной с принципом относительности Эйнштейна; кроме того этот термин звучит достаточно обыденно и не апеллирует к неизвестным читателям понятиям вроде «флага», «изотропной плоскости» или «параболической метрики». Однако первое достоинство названия «полуевклидова геометрия» могут оценить лишь лица, знакомые с «псевдоевклидовой геометрией Минковского»; второе же является одновременно и недостатком, поскольку для читателя, неискушенного в современной научной терминологии, наименование «полуевклидова геометрия» будет звучать слишком уж «чудно» (это нечто вроде «евклидовой полугеометрии»?). Наконец, наиболее укоренившееся за последнее время название «геометрия Галилея» исторически неточно – Галилео Галилей, творчество которого относится к началу XVII столетия, разумеется, не знал этой геометрии, так как идея о существовании ряда равноправных геометрических систем относится к числу наибольших научных достижений XIX века. Более точным является наименование «геометрия, связанная с принципом относительности Галилея» однако оно слишком длинно для того, чтобы его можно было употреблять систематически. Вот почему мы все же используем название «(неевклидова) геометрия Галилея», некоторым оправданием которого может служить та блистательная ясность и полнота, с которой сформулировал Галилей свой «принцип относительности», непосредственно приводящий к рассматриваемой (неевклидовой!) геометрии.

**Глава I. Простейшие геометрии аффинного типа.**

**§1. Теоретико-групповой подход к геометрии**

Теория геометрических преобразований лежит в основе общего определения геометрии.

Пусть дана группа преобразований *G* некоторого непустого множества *М*. Две фигуры *F* и *F'* называются *G*-эквивалентными, если в группе *G* найдётся такое преобразование *f*, что *f(F)=F'*.Понятие *G*-эквивалентности является отношением эквивалентности на множестве всех подмножеств множества *М.* Например, если *М -* множество точек плоскости, а *G* – группа движений, то «*G*-эквивалентность» заменяется термином «равенство», если *G* – подобие, то «*G*-эквивалентность» – «подобие», если *G* – аффинное преобразование, то «*G*-эквивалентность» – «аффинная эквивалентность».

Пусть *F* – данная фигура *.* Те свойства фигуры *F*, которые сохраняются при любых преобразованиях из *G*, называют инвариантными свойствами фигуры *F* относительно группы *G*.

Геометрия – наука, изучающая такие свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях некоторой группы.

**Схема включения изученных групп преобразований плоскости:**

Группа

преобразований

плоскости

Группа

аффинных

преобразований

Группа

подобий

Группа

движений

Группа

движений первого рода

Группа параллельных переносов

Группа подобий первого рода

Группа гомотетий с общим центром

Группа поворотов с общим центром

**Инварианты главных групп преобразований плоскости**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Расстояние между точками | Скалярное произведение векторов | Величина угла | Отношение отрезков | Отношение параллельных отрезков | Простое отношение трех точек | Параллельность прямых |
| Группа движений плоскости |  |  |  |  |  |  |  |
| Группа подобий |  |  |  |  |  |  |  |
| Группа аффинных преобразований |  |  |  |  |  |  |  |

Рассмотрим простейшие геометрии аффинного типа.

Наиболее близкой к аффинной геометрии геометрией аффинного типа является геометрия с группой всех аффинных преобразований, сохраняющих ориентации. Мы будем называть эту геометрию *специальной аффинной геометрией.*

Замечание. Отметим, что в то время как имеет смысл говорить об аффинной геометрии над произвольным полем *К*, специальная аффинная геометрия определена лишь над полем *R*.

«Евклидовым» вариантом специальной аффинной геометрии является *специальная евклидова геометрия* с группой  всех сохраняющих ориентации ортогональных преобразований. Эта геометрия отличается от евклидовой геометрии только тем, что симметричные фигуры в ней считаются различными.

Чтобы проиллюстрировать различие между евклидовой и спе­циальной евклидовой геометрией, можно, например, указать, что понятие векторного произведения принадлежит специальной евклидовой геометрии (пространства); в собственно евклидовой геометрии это понятие отсутствует.

Плоскость, в которой действует специальная аффинная (или специальная евклидова) геометрия, естественно называть *специальной аффинной* (соответственно – *евклидовой) плоскостью.* Чтобы из аффинной плоскости получить специальную аффинную плоскость , нужно выбрать некоторую аффинную координатную систему  и рассмотреть все аффинные координатные системы вида , где . При этом две аффинные координатные системы  и  тогда и только тогда приводят к одной и той же специальной аффинной плоскости, когда , т. е. когда эти системы одноименны (определяют одну и ту же ориентацию). Следовательно, переход от аффинной плоскости к специальной аффинной плоскости заключается в выборе на плоскости некоторой ориентации. В этом смысле можно сказать, что специальные аффинные плоскости являются не чем иным, как *ориентированными аффинными плоскостями.*



Однако выбор двух различных ориентаций приводит к различным (хотя, конечно, и изоморфным) специальным аффинным плоскостям. Поэтому, представляя себе специальную аффинную плоскость как ориентированную аффинную плоскость, надо постоянно следить за тем, чтобы результаты не зависели от выбора ориентации.

Конечно, все это с равным правом справедливо и для специальных евклидовых плоскостей.

Геометрия с группой  всех аффинных преобразований плоскости, оставляющих на месте некоторую точку *О*, называется *центроаффинной геометрией,* а соответствующая плоскость — *центрированной аффинной плоскостью.* Центроаффинная геометрия отличается от аффинной геометрии тем, что точка *О* играет в ней особую роль.

Координатными системами центроаффинной геометрии являются аффинные координатные системы с началом в точке *О*. Центроаффинная геометрия определена, конечно, и для случая произвольного поля *К*.

Точки центрированной аффинной плоскости находятся в естественном биективном соответствии с векторами из (точке *М* соответствует ее радиус-вектор ).Поэтому в центроаффинной геометрии можно, в частности, говорить *о сумме точек и о произведении точки на число* (понятия, в общей аффинной геометрии смысла не имеющие).

Вариантом центроаффинной геометрии, «различающим симметричные фигуры», является *специальная центроаффинная геометрия* с группой  всех сохраняющих ориентации аффинных преобразований, оставляющих точку *О* на месте.

Евклидовым вариантом центроаффинной геометрии является *центроевклидова геометрия* с группой , состоящей из всех ортогональных преобразований, оставляющих точку *О* на месте. Эта геометрия совпадает с «метрической геометрией векторов» из . В ней имеют смысл понятия *длины* точки и *угла* между двумя точками (впрочем, обычно длину точки, т. е. длину соответствующего радиус-вектора, называют *нормой* точки, а угол между двумя точками, т. е. угол между соответствующими радиус-векторами, *— угловым* *расстоянием* между этими точками).

Можно также рассматривать *специальную иентроевклидову геометрию* с группой  всех вращений вокруг точки *О*. Эта геометрия отличается от центроевклидовой геометрии только тем, что симметричные фигуры (с осью симметрии, проходящей через точку *О*) в ней считаются различными.

Пусть *Ф* — произвольное аффинное преобразование плоскости. В некоторой системе аффинных координат *х, у* срепером  это преобразование выражается, как известно, формулами



где

, где .

*А* — матрица этого преобразования.

*Определитель * *матрицы А не зависит от выбора репера .*

Этот определитель назовем *определителем аффинного преобразования Ф* и будем его обозначать символом  или .

Геометрический смысл определителя аффинного преобразования выясняется следующим предложением:

***Предложение 1.*** *Пусть Х — произвольная плоская фигура и пусть Х' —фигура, ,получающаяся из нее аффинным преобразованием Ф. Тогда площадь фигуры Х' равна площади фигуры Х, умноженной на абсолютную величину определителя преобразования Ф:*

.

***Следствие.*** *Площадь s эллипса с полуосями а и b (точнее, площадь области, ограниченной этим эллипсом) выражается формулой*

.

Доказательство. Площадь круга радиуса *а* равна, как известно, . Но эллипс с полуосями *а* и *b* получается из этого круга сжатием плоскости к одному из его диаметров с коэффициентом *.* Следовательно,

.

**§2. Эквиаффинная система**

***Определение 1****.* Аффинное преобразование *Ф* называется *эквиаффинным,* если .

Согласно предложению 1,

*аффинное преобразование тогда и только тогда эквиаффинно, когда оно сохраняет площади, т. е. когда площадь любой плоской фигуры Х равна площади преобразованной фигуры Х'.*

К числу эквиаффинных преобразований принадлежат все ортогональные преобразования. Однако существуют и неортогональные эквиаффинные преобразования.

Так как

,

то

*совокупность всех эквиаффинных преобразований является группой.*

Геометрия с этой группой называется *эквиаффинной геометрией, а* соответствующие плоскости — *эквиаффинными плоскостями.* В отличие от аффинной геометрии, в эквиаффинной геометрии имеет смысл понятие площади. Она является естественной областью, в которой целесообразно строить теорию площадей.

Две аффинные координатные системы с реперами ** и **; тогда и только тогда определяют одну и ту же эквиаффинную плоскость, когда бивекторы  и  либо совпадают, либо отличаются знаком, т. е. когда параллелограммы, построенные на векторах  и , имеют одну и ту же площадь. Это показывает, что *эквиаффинная плоскость является не чем иным, как аффинной плоскостью, на которой задан эталон площади* (область, площадь которой принята за единицу).

Конечно, здесь при выборе различных эталонов площади мы получаем из одной аффинной плоскости различные эквиаффинные плоскости.

При формулировке утверждений эквиаффинной геометрии, относящихся к площадям, необходимо соблюдать определенную осторожность. Например, доказанное выше следствие о площади эллипса, как оно сформулировано, не принадлежит эквиаффинной геометрии, поскольку в нем фигурируют длины полуосей *а* и *b*, смысла в эквиаффинной геометрии не имеющие. Чтобы получить «эквиаффинную» формулировку этого следствия, достаточно, однако, заметить, что согласно теореме Аполлония площадь параллелограмма, построенного на произвольной паре сопряженных радиусов эллипса, равна *аb.* Поэтому мы можем сказать, что

*отношение площади эллипса к площади параллелограмма, построенного на паре его сопряженных радиусов, равно *.

Эта формулировка в эквиаффинной геометрии уже вполне осмыслена.

***Замечание 1***. Ясно, что теорема Аполлония очевидным образом вытекает из возможности представления произвольного эллипса как образа некоторой окружности при аффинном преобразовании, поскольку для случая окружности она тривиальна (площадь квадрата, построенного на паре перпендикулярных радиусов окружности, равна квадрату радиуса окружности).

***Замечание 2***. Утверждение о площади эллипса может быть сформулировано также и следующим образом:

*отношение площадей эллипса и параллелограмма, построенного на паре его сопряженных радиусов, равно* .

Обратим внимание на тонкое, но существенное, различие между двумя последними формулировками: в то время как в первой формулировке мы говорим об отношении площади одной фигуры (эллипса) к площади другой фигуры (параллелограмма), во второй формулировке речь идет об отношении площадей этих фигур. Поскольку согласно предложению 1 при любом аффинном преобразовании площади всех фигур умножаются на одно и то же число, не зависящее от фигуры, то для любых двух фигур *Х* и *Y* отношение их площадей аффинно инвариантно. Другими словами, хотя в аффинной геометрии и нельзя говорить о площади одной отдельно взятой фигуры, но понятие *отношения площадей* двух фигур имеет полный смысл (подобно тому, как имеет смысл понятие отношения длин двух параллельных отрезков). Таким образом, вторая из приведенных выше формулировок имеет смысл в аффинной геометрии, тогда как первая — только в эквиаффинной.

Вариант эквиаффинной геометрии, в котором фундаментальной группой считается группа эквиаффинных преобразований, сохраняющих ориентацию, конечно, также возможен. В этой геометрии имеет смысл понятие *ориентированной площади.*

**§3**. **Аффинные преобразования и их свойства.**

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ.* Преобразование аффинной плоскости или аффинного пространства называется *аффинным*, если любые три коллинеарные точки она переводит в три коллинеарные точки («сохраняет отношение коллинеарности»).**

Замечание 1. Будем говорить, что прямая  *соответствует* прямой  в аффинном преобразовании *Ф*.

***Свойство 1.*** *Аффинное преобразование Ф каждую прямую  отображает на соответствующую прямую .*

***Свойство 2.*** *Преобразование Ф переводит параллельные прямые в параллельные.*

***Свойство 3.*** *Аффинное преобразование Ф каждую полупрямую  отображает на соответствующую полупрямую .*

***Свойство 4.*** *Аффинное преобразование Ф каждый отрезок* *а отображает на соответствующий отрезок* *.*

***Свойство 5.*** *Преобразование Ф переводит параллельные отрезки в параллельные.*

Чтобы сформулировать следующее свойство аффинных преобразований, рассмотрим две различные точки *М1*, *М2* и проходящую через них прямую **. Пусть *k* – отношение, в котором некоторая точка *М* прямой ** делит направленный отрезок . При произвольном аффинном преобразовании *Ф* коллинеарные точки *М1*, *М2*, *М* перейдут в коллинеарные точки , и потому будет определено отношение , в котором точка  делит отрезок .

***Свойство 6.*** *Имеет место равенство*

,

*т. е. аффинное преобразование сохраняет отношение, в котором данная точка делит данный отрезок.*

Поскольку внутренние точки отрезка  характеризуются условием , из этого свойства вытекает

***Следствие.*** Преобразование *Ф* каждую внутреннюю точку отрезка  переводит во внутреннюю точку отрезка .

**§4. Подобие как частный случай аффинного преобразования**

***Определение 2*.** Аффинное преобразование *Ф* называется *преобразованием подобия,* если оно сохраняет углы между прямыми, т. е. если любые две (пересекающиеся) прямые  и  оно переводит в прямые  и , образующие тот же угол.

Ясно, что

*все преобразования подобия образуют группу.*

Соответствующая геометрия называется *геометрией подобия.* Фигуры, равные в этой геометрии, т. е. фигуры, переводящиеся друг в друга преобразованием подобия, называются *подобными.*

Покажем, что это понятие подобия совпадает с привычным, известным из элементарного курса, т. е. что две фигуры тогда и только тогда подобны, когда после соответствующего перемещения они гомотетичны . Для этого, очевидно, достаточно показать, что любое преобразование подобия является композицией некоторого ортогонального преобразования (движения или движения плюс симметрия) и некоторой *гомотетии,* т. е. преобразования, выражающегося в соответствующим образом подобранной системе прямоугольных координат *х, у* формулами вида



где *h — коэффициент гомотетии.*

Для этого в свою очередь достаточно показать, что преобразование вида

 , 

тогда и только тогда сохраняет углы между прямыми, когда , т. е.когда оно является гомотетией.

Но это ясно. Действительно, преобразование переводит ось абсцисс  в себя, а прямую с уравнением



– в прямую с уравнением

.

Поэтому угол между осью абсцисс и прямой тогда и только тогда сохраняется при преобразовании , когда

,

т. е. когда .

Чтобы перейти от геометрии подобия к евклидовой геометрии, достаточно выбрать эталон длины.

**Глава II. Геометрия Галилея и дуальные числа**

**§1. Определение геометрии Галилея**

Поскольку любое аффинное преобразование переводит любое направление на плоскости (пучок параллельных прямых) снова в некоторое направление, интересно рассмотреть аффинные преобразования, которые сохраняют данное направление (особое направление). Множество таких преобразований плоскости образуют группу, а соответствующую геометрию называют геометрией Галилея.

Если за особое направление выбрать ось *Оу*,то преобразования Галилея, зададутся формулами



Таким образом, нас будут интересовать лишь те свойства фигур плоскости *хОу*, которые сохраняются при преобразованиях (другими словами, сохраняются при сдвигах)



в направлении оси *Оу* и при параллельных переносах



Лишь такие свойства фигур имеют геометрический смысл в рамках рассматриваемой геометрии. Сама эта геометрия возникла из механических рассуждений, так что слова «имеют геометрический смысл» в нашем случае означает: «имеют механический смысл», то есть отвечают каким-то фактам «одномерной кинематики» - учения о движениях материальных точек вдоль фиксированной прямой *О*.

Перечислим основные свойства «движений» . Заметим, что преобразования переводят

* каждую прямую линию снова в прямую линию;
* параллельные прямые снова в параллельные прямые;
* два отрезка *АВ* и *CD* одной прямой в такие отрезки *А'В'* и *С'D' ,* что

;

* каждую фигуру *F* в фигуру *F'* той же площади;

Поэтому понятие прямой линии, параллельных прямых, отношения отрезков одной прямой, площади фигуры имеют смысл не только в обычной геометрии Евклида, но и в геометрии Галилея. Очень важно также то, что каждое преобразование *переводит любую прямую, параллельную оси Оу, снова в прямую, параллельную оси Оу*, – так что, если в геометрии Евклида понятие «прямая, параллельная оси *Оу*»является геометрически бессодержательным (ибо обычным движением такую прямую можно перевести в любую другую), то в геометрии Галилея *параллельные оси Оу прямые* играют особую роль, отличную от роли всех остальных прямых. [В противоположность этому «прямые, параллельные оси *OX*» не отличаются от других «обыкновенных» (т. е. не параллельных оси *Oy*) прямых.] В дальнейшем сохраним термин «прямая», не сопровождаемый никаким прилагательным, только за прямыми, не параллельными оси *Оу*;параллельные же оси *Оу* прямые мы будем называть *особыми прямыми*.

Для доказательства всех перечисленных свойств движений достаточно проверить, что ими обладают сдвиги , поскольку параллельные переносы заведомо всеми этими свойствами обладают.

То, что прямую, параллельную оси *Oy*, – а именно в ту же самую прямую, – непосредственно вытекает из определения сдвига с коэффициентом сдвига *v* переводит точку *А* прямой *l*, проходящей через начало координат *О*, в точку  (рис. 1).

x

y

O

*P*

Q

m





*M*





*l*

















*A*

*B*

*C*





Рис. 1

Обозначим прямую  через , точки пересечения любой параллельной оси *Oy* прямой *m* c прямыми *l* и  – через *M* и , а точки пересечения прямых *т* и  с осью *Ох* – через *Q* и *P*. Из рис. 1 легко получим . Но так  получается из точки *А* сдвигом , то

.

Используя опять рис. 1 (на котором  и ), имеем

,

откуда

.

Это как раз и означает, что каждую точку *М* прямой *l* сдвиг переводит в точку  прямой , т. е. что он *переводит прямую l в прямую* .

Пусть  – прямая, параллельная прямой *l* и не проходящая через точку *О* (см. рис. 1). Обозначим через *d* длину (обычную, измеряемую в евклидовой геометрии) равных между собой вертикальных (т. е. параллельных оси *Оу*) отрезков , , , …, заключенных между прямыми *l* и . Сдвиг сводится к переносу вдоль каждой прямой, параллельной оси *Оу*, всех точек этой прямой на одно и то же расстояние (но точек разных прямых – на разные расстояния); поэтому все отрезки  этот сдвиг переведет в отрезки , , , … той же длины:

.

А так концы , , , … этих отрезков принадлежат прямой (в которую сдвиг переводит прямую), то вторые их концы , , , … попадут на прямую , параллельную прямой  и отстоящую от  на расстоянии *d* в направлении оси *Оу*. Отсюда и следует, что *сдвиг переведет прямую  в прямую .* Попутно мы убедились, что все прямые, параллельные фиксированной прямой , сдвиг переводит в прямые, параллельные прямой , т. е. *что параллельные прямые сдвиг переводит в параллельные*.

Нетрудно доказать, что если отрезки АВ и CD какой-то прямой  сдвиг переводит в отрезки *А'В'* и *C'D'* прямой *l'*, то

 .

Наконец, площадь фигуры *F* приближенно равна сумме площадей помещающихся внутри *F* «маленьких» квадратов, образованных сетью прямых, параллельных осям *Ох* и *Оу* и отстоящих друг от друга на одно и то же «малое» расстояние *е* (т. е. приближенно равно числу таких квадратов, умноженному на площадь *е2* одного квадрата, — рис. 2, наверху); точное же значение площади определяется как предел полученных таким образом величин, отвечающих последовательности неограниченно уплотняющихся сеток квадратов (т. е. таких, что величина *е* неограниченно уменьшается). Сдвиг переводит фигуру *F* в новую фигуру *F'*, а сетку квадратов — в сетку параллелограммов той же площади (см. рис. 2, внизу) — ведь параллельная оси *Оу* сторона параллелограмма будет той же, что и сторона квадрата, а опущенная на эту сторону высота параллелограмма также равна стороне квадрата. Поэтому приближенное значение площади фигуры *F'*, равное произведению числа помещающихся внутри *F'* параллелограммов сетки на площадь *е2* одного параллелограмма, будет тем же, что и приближенное значение площади фигуры *F*. А так как приближенное равенство пл. *F'*  пл. *F* имеет место при любой точности определения площадей фигур *F* и *F'* (зависящей от размера квадрата сетки), то, очевидно,

пл. *F'* = пл. *F*.

После этих предварительных замечаний мы можем приступить к обсуждению смысла понятий «расстояние между точками» и «угол между прямыми» в геометрии Галилея.

**§2. Расстояние между точками.**

В евклидовой геометрии расстояние  между двумя точками и  определяется формулой



при этом равенство нулю расстояния между двумя точками означает, что эти точки совпадают.

Расстояние  между двумя точками и в геометрии Галилея определяется по формуле

;

оно равно проекции отрезка на ось *Ох* (рис. 3, а). Так как координата *х* точки *А* преобразуется при движении по формуле



то ясно, что разность  абсцисс двух точек *А1* и *А* при движении не меняется.

*Х*

*P*

*Y*

*Х*

*Y*

*P1*

*A*(*x*, *y*)

*A1*(*x1*, *y1*)

*A1*(*x1*, *y1*)

*A*(*x*, *y*)

*O*





PP1

*O*

*a)*

*б)*

Рис. 3

Если расстояние , между точками *А* и *А1* равно нулю, т. е. , то точки *А* и *А1* принадлежат одной особой прямой (прямой, параллельной оси *Оу*; рис. 3, б). Для таких двух точек можно определить *особое расстояние , между точками*:

.

В самом деле, если абсциссы двух точек и одинаковы (если ), то произвольное движение преобразует их в точки и , где  и

, ;

поэтому

,

т. е. разность  не меняется при движении, а, следовательно, имеет на плоскости Галилея геометрический смысл. Однако если расстояние  между точками *А* и *А1* отлично от нуля, т. е. абсциссы этих точек различны, то разность  ординат этих точек не сохраняет своей величины при движении, т. к. в этом случае

.

Да это и понятно — ведь сдвиг оставляет на месте начало *О* системы координат и меняет ординату любой точки *М*, не принадлежащей оси *Оу*; поэтому он никак не может сохранять разность ординат точек *М* и *О*.

Очевидно, что две точки *А* и *В* плоскости Галилея совпадают в том и только в том случае, когда равно нулю как расстояние  между этими точками, так и особое расстояние ** между ними.

**§3. Окружность**

***Окружностью*** *S* плоскости Галилея мы назовем *множество точек М(х, у), удаленных от фиксированной точки Q на постоянное (по абсолютной величине) расстояние* *r*; при этом точка *Q*(*a*, *b*) называется центром окружности, а (неотрицательное) число *r* — ее радиусом. Так как

,

то уравнение



или

,

где

, .

Ясно, что окружность *S* радиуса *r* с центром *Q* представляет собой совокупность двух особых прямых, отстоящих от точки *Q* на расстояние *r* (рис. 4, *а*); если радиус *r* окружности обращается в нуль, то эти две прямые сливаются в одну (рис. 4, *б*). Заметим еще, что окружность *S* геометрии Галилея имеет строго определенный радиус (равный половине расстояния между образующими эту окружность прямыми), но бесконечно много центров: любую точку особой прямой, содержащей точку *Q*, можно принять за центр этой окружности (см. рис. 4).

*Х*

*Y*

*Х*

*Y*

*P1*

*S*

*r*

*O*

*a)*

*б)*

Рис. 4

*O*

*M*(*x*, *y*)

*Q*(*a*, *b*)

*S*

*S*

*Q*(*a*, *b*)

*M*(*x*, *y*)

**§4. Угол между прямыми**

Угол , между прямыми *l* и *l1* пересекающимися в точке *Q*, можно определить как длину заключенной между прямыми *l* и *l1* дуги *NN1* окружности *S* единичного радиуса с центром в точке *Q* (ср. относящиеся к геометрии Евклида и к геометрии Галилея рис. 5, *а* и 5, *б*; ясно, что под «длиной дуги» *NN1* окружности *S* геометрии Галилея надо понимать «особую длину» , отрезка *NN1*, т. е. особое расстояние между точками *N* и *N1* содержащей их особой прямой). Определенная таким образом величина , угла, очевидно, имеет смысл в геометрии Галилея, т. е. сохраняется при движениях : ведь точку *Q* пересечения прямых *l* и *l1* движение

*N*

*Q*

*S*

*N1*

*l1*

*l*

*O*

*S*

*Y*

*X*



*Q*



*N*

*N1*

*S*

*l*

*l1*

Рис. 5

*a)*

*б)*

переводит в точку *Q'* пересечения полученных из *l* и *l1* движением прямых *l*' и , а единичную окружность *S* и дугу *NN1*  этой окружности — в единичную окружность *S'* с центром *Q'* и в дугу окружности *S'* (рис. 6). Это определение угла между прямыми в геометрии Галилея равносильно следующему: *для того чтобы найти угол  между прямыми l и l1 достаточно провести особую прямую т, удаленную от вершины Q угла на расстояние* 1 *и пересекающую стороны угла в точках N и N1*; *тогда*

.

Если уравнения прямых *l* и *l1*, имеют привычный вид  и , а координаты точки *Q* равны *х0* и *у0*, то уравнение прямой *m* таково:

.

Поэтому точки *N* и *N1* будут иметь координаты

 и ,

а следовательно,





(т. к. *Q*(*x0*, *у0*)—общая точка прямых *l* и *l1* и поэтому . Таким образом, окончательно имеем

.

*X*

*N*

*N1*

*Y*

*l*

*O*

*Q*

*l1*











Рис. 6

Рис. 7

*X*

*Y*

*O*

*m*

*Q*

*l1*

*l*

Если одну из прямых *l* и *l1*, например *l1*, поворачивать вокруг точки *Q*, устремляя ее к особой прямой *т*, то угол ** будет неограниченно возрастать (рис. 7) — явление, которое противоречит нашим представлениям, заимствованным из геометрии Евклида.

Укажем еще, что в противоположность евклидову случаю «галилеев угол» ** между двумя прямыми *l* и *l1* определяется однозначно (рис. 5, *а* и *б*) — это обстоятельство делает весьма многие рассмотрения, относящиеся к геометрии Галилея, существенно более простыми, чем соответствующие им факты евклидовой геометрии.

Если прямые *l* и *l1* параллельны, то определяемый по формуле угол ** между этими прямыми равен нулю.

**§5. Треугольник**

Простейшей фигурой плоскости Галилея является треугольник *ABC*, образованный тремя точками *А*, *В* и *С* и тремя соединяющими их (обыкновенными) прямыми *ВСа*, *САb* и *АВс* (рис. 8). При этом мы, как это принято и в геометрии Евклида, условимся обозначать теми же буквами *а*, *b* и *с* также и длины сторон треугольника, т. е. (положительные) расстояния ,  и ; буквами *А*, *В* и *С* мы будем обозначать не только точки плоскости — вершины треугольника, но и (положительные) величины его углов: , , . Отметим еще, что иногда для обозначения (положительной) длины  некоторого отрезка *АВ* мы будем употреблять ту же запись *АВ*, что и для самого отрезка (например, такая запись будет встречаться в некоторых равенствах, содержащих длины сторон треугольника).

Длины *а*, *b*, *с* сторон треугольника плоскости Галилея и величины *А*, *В*, *С* его углов не независимы: они связаны некоторыми очень простыми соотношениями. Прежде всего, очевидно, что если *с* — наибольшая из трех сторон, то (см. рис. 8)

.

*X*

*Y*

*O*

*N*

*А*

*b*

*а*

*В*

*С*

*c*

*c*

*b*

*а*

1

2

Рис. 8

С другой стороны, из того же рис. 8, на котором CN || AB и, следовательно,  и , непосредственно следует

.

«Формула углов» может быть выведена из «формулы сторон» с помощью следующего соотношения, играющего в геометрии Галилея роль, родственную роли теоремы синусов в геометрии Евклида:

.

Таким образом, длины сторон любого треугольника плоскости Галилея пропорциональны величинам противоположных углов:

, , ,

где  — коэффициент пропорциональности, поэтому формула получается из формулы умножением обеих частей формулы на .

Для доказательства формул достаточно провести «высоты» *АР*, *BQ* и *CR* треугольника *ABC*, т. е. особые прямые, проходящие через вершины *А*, *В* и *С* треугольника и пересекающие его противоположные стороны в точках *Р*, *Q* и *R*. Длины высот мы, как принято и в евклидовой геометрии, обозначим через *ha*, *hb* и *hc*:

,

,

.

В силу определения углов в геометрии Галилея, очевидно, имеем



(рис. 9, *а*; напомним, что  и ); поэтому

.

Точно так же с использованием высот *hb* и *ha* доказывается, что



и

.

Вот еще одно следствие соотношений . Нетрудно видеть, что если *S* – площадь треугольника *ABC* (это понятие, как известно, сохраняет смысл и в геометрии Галилея), то

.

В самом деле, «повернем» (при помощи некоторого движения ) треугольник *ABC* в такое положение *А'В'С'*, чтобы сторона *В'С'*

*X*

*Y*

*A*

*C*

*B*

**

*R*

*P*

*Q*

*O*

**

*Y*

**

*O*

Рис. 9

*а)*

*б)*

**

*a*

*b*

*c*

*X*

**

**

**

**

*b*

*c*

*a*

треугольника *А'В'С'* била параллельна оси *Ох* (рис. 9, *б*). При этом «галилеева длина» *а'* стороны *В'С'* преобразованного треугольника и его «галилеева высота»  станут равными «евклидовой длине» стороны *В'С'* и «евклидовой длине» высоты *А'Р'*, так что

,

где *S'* — площадь треугольника *А'В'С'* (одновременно «галилеева» и «евклидова» — ведь в геометрии Галилея понятие площади имеет тот же смысл, что и в геометрии Евклида). Но поскольку величины *a*, *ha* и *S* имеют смысл в геометрии Галилея, то они не меняются при движениях : *а'* = *а*, *h'a* = *ha* и *S'* = *S* (рис. 9, *а* и *б*), а значит,



Аналогично доказываются и две другие из формул .

Подставляя теперь в первую из формул *ha* = *bC*, а в третью — значения высоты *hc*, получим



Формулы родственны формулам



евклидовой геометрии.

Из формул сразу вытекает, что известное свойство равнобедренного треугольника евклидовой геометрии сохраняет силу и в геометрии Галилея: *если стороны а и b треугольника ABC равны между собой*, *то равны и противолежащие им углы А и В и наоборот* (т. к. ; см. рис. 10).

Рис. 10

*X*

*Y*

*A*

*C*

*B*

*K*

*R*

*L*

*Q*

*O*

*N*

Очевидно также, что *высота CR равнобедренного треугольника ABC одновременно является также и медианой*, т. е. она делит противоположную сторону АВ пополам (см. рис. 10, на котором *AR* = *AC* = *b*, *BR* = *BC* = *a*). Однако биссектрисой угла *С* прямая *CR* уже, очевидно, не является, т. к. особая прямая делить угол пополам, разумеется, никак не может. Отсюда сразу следует, что три биссектрисы треугольника в геометрии Галилея не обязаны пересекаться в одной точке: так, на рис. 10 биссектрисы *АК* и *BL* углов *А* и *В*, очевидно, пересекаются в середине *Q* высоты *CR*, но прямая *CQ* (т. е. *CR*), как у уже отмечали, не совпадает с биссектрисой *CN* угла *С*. В противоположность этому три медианы *AD*, *BE* и *CF* треугольника *ABC* обязательно пересекаются в одной точке *М* и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины: *AM*:*MD* = *BM*:*ME* = *CM*:*MF* = 2:1. Это следует из того, что медианы треугольника *ABC* геометрии Галилея совпадают с его евклидовыми медианами и отношения, в которых делит медианы точка их пересечения, имеют в геометрии Галилея и в геометрии Евклида одно и то же значение (рис. 11).

Рис. 11

*X*

*Y*

*A*

*C*

*B*

*D*

*F*

*E*

*M*

*O*

Отметим еще, что в геометрии Галилея не может быть треугольника, у которого все три стороны равны между собой: ведь если две стороны треугольника одинаковы, то третья обязательно равна их сумме. Аналогичное замечание справедливо и для углов; поэтому равнобедренный треугольник можно также назвать равноугольным, так как равенство двух углов (а только такая «равноугольность» возможна в треугольнике) равносильно равнобедренности треугольника.

Если условиться обозначать , ,  и , ,  направленные (т.е. взятые с определенным знаком) стороны и углы треугольника *ABC* плоскости Галилея, то формулы – примут следующий простой вид:

,

,

;

таким образом, и здесь имеют место соотношения типа соотношения , где

также и знаку коэффициента пропорциональности  можно придать определенный геометрический смысл.

Остановимся еще на признаках равенства треугольников в геометрии Галилея. Ясно, что два треугольника *ABC* и *А'В'С'*, имеющих

*X*

*Y*

*A*

*C1*

*B*

*С*

*O*

Рис. 12

*б)*

*а)*

*X*

*Y*

*A*

*C*

*B*

*O*

*C1*

*B1*

*b*

*а*

одинаковые стороны или одинаковые углы, не обязаны быть равными между собой: ведь две стороны треугольника в геометрии Галилея позволяют найти третью сторону, а два угла – третий угол, в то время как двумя сторонами или двумя углами треугольник плоскости Галилея, очевидно, не определяется (рис. 12 *a*, *б*). Также из того, что, скажем, две стороны *а* и *b* треугольника *ABC* и заключенный между ними угол *С* или сторона *а* и два примыкающих к ней угла *В* и *С* треугольника *ABC* равны сторонам *а'* и *b'* и углу *С'*, соответственно стороне *а'* и углам *В'* и *С'* треугольника *А'В'С'*, еще не вытекает равенство треугольников *ABC* и *А'В'С'* (так, у треугольников *ABC* и *А1ВС* на рис. 13, *а* сторона *ВС* = *а* и угол *С*—общие, а *АС* = *А1С*, но *АВ* = *a* + *b*, а *А1В* = *а* – *b*; у треугольников ABC' и А1ВС на рис. 13, *б* сторона ВС = а и угол С—общие и = , тогда как явно *AВ* > *А1В*). Однако если направленные (т.е. взятые со знаком + или –) стороны  и треугольника *ABC* равны направленным сторонам  и  треугольника *А'В'С'* и , то треугольники *ABC* и *А'В'С'* равны; также треугольники *ABC* и *А'В'С'* равны, если  и , .

*X*

*Y*

*A*

*A1*

*B*

*С*

*O*

*b*

*а*

Рис. 13

*X*

*Y*

*A*

*A1*

*С*

*O*

*а*

*б)*

*b*

*а)*

*B*

Заметим еще, что из соотношений вытекает пропорциональность сторон треугольников *АВС* и *А'С'В'*, имеющих одинаковые углы (см. рис. 12, *б*): для таких двух треугольников

.

В этом случае треугольник *А'В'С'* можно получить из треугольника *ABC* преобразованием подобия 1-го рода с коэффициентом подобия *k* — *отображением плоскости Галилея на себя, сохраняющим величины всех углов и увеличивающим все отрезки в одно и то же число k раз* (примером такого преобразования подобия может служить сжатие к точке *О* или гомотетия – преобразование, переводящее каждую точку *А* плоскости в такую точку *А'* луча *ОА*, что  рис. 14, *а*). Аналогично этому, если стороны треугольника А'В'С' равны сторонам треугольника ABC



(см. рис. 12, *а*), то в силу тех же соотношений углы этих треугольников пропорциональны:

.

В этом случае треугольник А'В'С' можно получить из треугольника ABC так называемым преобразованием подобия 2-го рода с коэффициентом подобия  – *отображением плоскости Галилея на себя, сохраняющим величины всех отрезков плоскости Галилея и увеличивающим величины всех углов в одно и то же число  раз* (примером такого преобразования может служить сжатие к прямой *Ох*, переводящее каждую точку *А* плоскости в такую точку *А'* луча *РА* || *Оу*, что

;

см. рис. 14, *б*).

**§6. Дуальные числа и операции над ними**

1. Определение дуальных чисел и действий над ними

По аналогии с комплексными числами введем следующие определения.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дуальным числом* z называется упорядоченная пара  действительных чисел.**

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.* Два дуальных числа  и считаются *равными* (**пишут ** = ) тогда и только тогда, когда** *a* **=** *c* **и** *b* **=** *d***.**

Если *х =* ****– дуальное число, то *а* назовем *действительной* частью; а *b* – *мнимой* частью, сохранив старые обозначения: *a* = *Re* z, *b* = *Im* z. Числа , для которых , будем как и в случае комплексных чисел, называть *мнимыми*, а числа вида , , – *чисто мнимыми*.

Определим операции сложения и умножения дуальных чисел (т. е. пар вида ****).

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть*  и  – два дуальных числа. Тогда сумма  определяется равенством**

,

**а произведение  – равенством**

.

Операции сложения и умножения дуальных чисел обладают следующими свойствами:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. .

Для пар вида **** определенные выше операции сложения и умножения сводятся к соответствующим операциям над действительными числами, т. е. имеют место равенства

;

.

Поэтому пару **** можно кратко обозначить через *а*.

Число (0, 1) обозначим буквой . Согласно закону умножения дуальных чисел, имеем

.

В принятых обозначениях равенство принимает вид . Поскольку  пару **** можно обозначить так:

.

В дальнейшем будем записывать дуальные числа в виде:



Такую форму записи дуального числа, по аналогии с комплексными числами, называют *алгебраической*. При этом следует иметь в виду, что

(0, 1)(0, 1) = (0, 0), т. е. .

Если перейти к алгебраической форме записи дуальных чисел, то формулы , примут вид

;

.

Помимо отмеченных свойств сложения и умножения дуальных чисел, для любого числа  справедливы следующие равенства:

1. ;
2. .

Кроме того каждое дуальное число  имеет противоположное ему число . Однако не каждое число  имеет обратное ему число, т. е. число  такое, что . Покажем, что если , , то обратное ему число  имеет вид

.

Числа вида  не имеют обратных.

Пусть . Согласно определению обратного числа, имеем



или

.

Отсюда, пользуясь определением равенства дуальных чисел, получим систему для отыскания *с* и *d*:



Если *a* = 0, то система не имеет решения и, следовательно, не существует числа  такого, что . Рассмотрим теперь случай, когда . Из первого уравнения находим . Подставляя это выражение во втрое уравнение, получаем , откуда .

Операция *вычитания* и *деления* дуальных чисел определяются следующими равенствами:

;

, .

Таким образом, в то время как в множестве комплексных чисел невозможно деление лишь на нуль, в множестве дуальных чисел невозможно деление на все числа вида . Эти числа называются *делителями нуля*, поскольку для каждого числа указанного вида существует такое отличное от нуля число , что .

Из равенства вытекает, что



.

1. Сопряженные дуальные числа

На практике для нахождения частного двух дуальных чисел вместо полученной в п. 1 формулы используют, как и в случае комплексных чисел, удобный прием, основанный на свойствах сопряженных чисел: и числитель и знаменатель дроби  умножают на .

По аналогии с комплексными переменными введем следующее определение.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.* Два дуальных числа называют сопряженными, если они отличаются лишь знаком мнимой части.**

Число, сопряженное дуальному числу , обозначается . Таким образом, в полной аналогии с комплексными числами, имеем *Re* = *Re* z, *Re*  = – *Im* z.

Свойства сопряженных дуальных чисел полностью совпадают с аналогичными свойствами комплексных чисел. В частности, условие  =  характеризует вещественные числа, а условие  = –  – чисто мнимые числа; произведение сопряженных чисел является числом вещественным. Поэтому для определения значения дроби  достаточно домножить ее числитель и знаменатель на число ; при этом знаменатель полученного выражения будет числом вещественным, и для того чтобы разделить на него число , достаточно поделить на  отдельно *Re*() и *Im*().

1. Модуль и аргумент дуального числа

Как известно, модулем комплексного числа



является действительное число, определенное с помощью равенства

, где .

Аналогично, в множестве дуальных чисел, сохраняя тоже обозначение  для модуля *z*, положим

.

А именно, введем следующее определение.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.* Пусть**  **– произвольное дуальное число. Действительное число** *x* **назовем *модулем* дуального числа** *z***.**

Таким образом, модуль дуального числа может быть как положительным, так и отрицательным.

Пусть *z* – число, имеющее ненулевой модуль: . В выражении  числа *z* вынесем модель *r* этого числа за скобку как множитель:

.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.* Пусть**  **– дуальное число, имеющее ненулевой модуль. Отношение  называют *аргументом* дуального числа и обозначают .**

Итак, каждое дуальное число *z* ненулевого модуля можно записать следующим образом:

,

где , .

Запись аналогична тригонометрической форме комплексного числа.

Заметим, что во множестве дуальных чисел для вещественных чисел **** равен нулю, а для чисто мнимых **** не существует.

Форма записи дуальных чисел очень удобна в тех случаях, когда эти числа приходится перемножать или делить.

Пусть  и . Составим произведение  этих чисел:



.

Таким образом, для дуальных чисел выполняются известные для комплексных чисел формулы:

,

,

т. е. при умножении дуальных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Легко показать, что модуль частного дуальных чисел равен отношению модулей делимого и делителей, а аргумент частного – разности аргументов делителя и делимого, т. е. справедливы формулы:

, ,



С помощью и выводятся законы равенства, позволяющие дуальное число возводит в любую натуральную степень и извлекать из него корень:

;

.

Из последнего равенства вытекает, что корень нечетной степени из дуального числа при  определяется однозначно; корень же четной степени не существует, если *r* < 0 ,и имеет два значения, если *r* > 0. Корень натуральной степени *n* > 1 из дуального числа нулевого модуля извлечь нельзя.

**§7. Изображение дуальных чисел**

Применение комплексных чисел в геометрии связано с геометрическим истолкованием этих чисел как точек плоскости. Каждому комплексному числу

,

где , , ставится в соответствие точка с прямоугольными декартовыми координатами *x*, *y* или с полярными координатами *r*,  (см. рис. 15). При этом расстояние между

Рис. 15

*X*

*Y*

*x*



*y*

*r*

*z*

*O*

двумя точками *z1* и *z2* совпадает с модулем разности комплексных чисел, соответствующих этим точкам, а угол между двумя прямыми, пересекающимися в точке *z0* и проходящими через точки *z1* и *z2*, равен аргументу простого отношения трех точек *z0*, *z1* и *z2*, т. е.

;

;

каждое движение плоскости можно записать в виде

, ,

или

, .

Поскольку определение и свойства дуальных чисел аналогичны определению и свойствам комплексных чисел, возникает предположение, что каждому дуальному числу  также можно поставить в соответствие точку плоскости с прямоугольными декартовыми координатами *x*, *y* или полярными координатами *r*, , где ,  (если  существует), причем расстояние между двумя точками *z1* и *z2* вычисляется по формуле , а угол между прямыми, пересекающимися в точке и проходящими через точки *z1* и *z2*, – по формуле .

Так как для дуальных чисел ,  (), то в этом случае расстояние *d* точки *z* от начала координат *O* равно *x*, т. е. проекции отрезка *Oz* на ось *Ox* (рис. 16), а угол  между прямыми *Ox* и *Oz* равен . Заметим, что прямая *Oz* не параллельна оси *Oy*; следовательно, на ней найдется точка *z0* такая, что *Re* *z0*, = 1, т. е. . Отсюда следует, что угол между прямыми *Ox* и *Oz* равен *y0* (рис. 16).

Рис. 16

*X*

*Y*

*x*

1

*y*

*d*

*z*

*O*

*y0*

Таким образом, если дуальные числа интерпретировать точками плоскости в полной аналогии с комплексными числами, то получится плоскость, на которой расстояние между двумя точками и угол между двумя пересекающимися прямыми определяются особым образом. Иными словами, дуальные числа интерпретируются точками неевклидовой плоскости.

Под расстоянием между точками *z1* и *z2* рассматриваемой плоскости логично понимать проекцию отрезка *z1z2* на ось *Ox* (рис. 17), т. е. разность *x2* – *x1*. Так как для дуальных чисел  и  модуль разности  равен , то при таком определении расстояния и для дуальных чисел определяется формула .

Рис. 17

*X*

*Y*

*x2*

*y2*

*x1*

*z1*

*O*

*y1*

*z2*

Если , то расстояние между точками *z1* и *z2*, определенное указанным выше способом, равно нулю. Однако в этом случае точки *z1* и *z2* не обязательно совпадают. Для таких точек можно определить особое (второе) расстояние, понимая под ним проекцию отрезка *z1z2* на ось (рис. 18) (см. формулу ).

Рис. 18

*X*

*Y*

*x1 = x2*

*y2*

*z1*

*O*

*y1*

*z2*

Очевидно, что две точки *z1* и *z2* рассматриваемой плоскости совпадают в том и только в том случае, когда нулю равны оба расстояния.

Прежде чем переходить к определению основных понятий «дуальной» геометрии, скажем, что преобразования играют роль движений дуальной плоскости. (Под движением, как обычно, будем понимать преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.)

Выше было доказано, что преобразования переводят прямые в прямые, параллельные прямые в параллельные прямые, сохраняют пропорциональность отрезков, принадлежащих одной прямой, сохраняют площадь.

С помощью дуальных чисел угол  между прямыми, пересекающимися в точке  и проходящими через точки *z1* и *z2*, выражается уже знакомой формулой , т. е.

,

где , как в случае комплексных чисел, – простое отношение трех точек . Соотношения следуют из того, что , где ,  (рис. 19).

*z1*

Рис. 19

*X*

*Y*



*z1*

*O*

*z0*

*z2*









Как уже было отмечено, угол между параллельными прямыми равен нулю. В этом случае можно говорить о расстоянии  между этими прямыми.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.* Под *расстоянием*** ** ***между параллельными прямыми*** *l1* **и** *l2* **будем понимать (особую) длину заключенного между прямыми** *l1* **и** *l2* **отрезка *М1М2* особой прямой. (Рис. 20)**

Рис. 20

*X*

*Y*

*m*

*O*



*l1*

*l2*

*S1*

*S2*

*M1*

*M2*

Так как особые прямые переводятся движениями снова в особые прямые, то определенное таким образом расстояние ** имеет смысл в рассматриваемой геометрии.

Если уравнения прямых *l1* и *l2* имеют вид

 и ,

то

.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.* Расстоянием  от точки** *М* **до прямой** *l* **условимся называть (особое) расстояние от точки *М* до точки пересечения прямой** *l* **с особой прямой, проходящей через точку *М*. (Рис. 21)**

Рис. 21

*X*

*Y*

*M*

*O*

*P*

*l*

Это определение можно обосновать следующим образом: в евклидовой геометрии расстояние от *М* до прямой *l* – это расстояние от точки *М* до самой близкой к *М* точки *Р* прямой *l*; в рассматриваемой геометрии «самая близкая» к *М* точка *Р* прямой *l* удалена от *М* на нулевое расстояние, поэтому расстояние от точки *М* до прямой *l* приходится измерять особым расстоянием между *М* и *Р*. Аналогично обстоит дело и с определением 5.

Из определений 5 и 6 следует, что роль перпендикуляров к прямой в геометрии Галилея, к которой мы пришли, отождествляя дуальные числа с точками плоскости, играют особые прямые.

**Заключение**

В дипломной работе изложены представления о простейших геометриях аффинного типа, а также основные понятия и свойства геометрии Галилея, в которой движениями служат так называемые преобразования Галилея, соответствующие (по сути) переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой. Определены основные понятия геометрии Галилея (понятия расстояния, прямой, угла, окружности, треугольника). Рассмотрены понятие дуальных чисел и операций над ними, показана связь дуальных чисел с геометрией Галилея.

Цели данной работы достигнуты.

В результате можно сделать вывод о том, что геометрия Галилея на плоскости полностью совпадает с геометрией плоскости дуальных чисел.

Данный предложенный материал можно использовать для ведения факультативных занятий в классах с углубленным изучением математики.

**Литература**

1. Ефимов И.В. Высшая геометрия – М. 1978 г. (с. 9-38)
2. Измайлова Г. С., Сафарова А. Д. «Преобразование плоскости в задачах», Оренбург: издательство ОГПУ, 2001 г.(с. 18-22)
3. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа – М. 1973 г. (с. 9-14)
4. Котова Ю. «Дуальные числа и геометрия Галилея», газета «Математика» №2 и №7 за 1995 г.
5. Постников М. М. «Аналитическая геометрия», М: Наука, 1973 г.(с. 617-633, 707-726)
6. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства – М.: Наука, 1969 г. (с. 251-304)
7. Яглом И. М. «Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия», М: Наука, 1969 г. (с. 13-68)