## Введение.

На финансовом рынке обращается множество ценных бумаг: государственные ценные бумаги, муниципальные облигации, корпоративные акции и т.д. Если у участника рынка есть свободные деньги, то их можно отнести в банк и получать проценты или купить на них ценные бумаги и получать дополнительный доход. Но в какой банк отнести? Какие ценные бумаги купить? Малорисковые ценные бумаги, как правило, и малодоходны, высокодоходные, как правило, более рисковые. Экономическая наука может дать некоторые рекомендации для решения этого вопроса.

## Постановка задачи.

Рассмотрим общую задачу распределения капитала, который участник рынка хочет потратить на покупку ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг. Предваряя точные математические постановки, констатируем очевидную общую цель инвестора – вложить деньги так, чтобы сохранить свой капитал, а при возможности и нарастить его.

Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его портфелем. Стоимость портфеля – это суммарная стоимость всех составляющих его бумаг. Если сегодня его стоимость есть Р , а через год она окажется равной Р′ , то (Р′-Р)/Р естественно назвать доходностью портфеля в процентах годовых. Т.е. доходность портфеля – это доходность на единицу его стоимости.

Пусть хi – доля капитала, потраченная на покупку ценных бумаг i-го вида. Рассуждения о долях эквивалентны тому, что весь выделенный капитал принимается за единицу. Пусть di – доходность в процентах годовых ценных бумаг i-го вида в расчете на одну денежную единицу.

Найдем доходность всего портфеля dp. С одной стороны, через год капитал портфеля будет равен 1+ dp, с другой - стоимость бумаг i-го вида увеличиться с х до xi + di\*xi, так что суммарная стоимость портфеля будет равна Σxi + Σxi\*di = 1 + Σxi\*di. Приравнивая оба выражения для стоимости портфеля, получаем dp = Σxi\*di.

Итак, задача увеличения капитала портфеля эквивалентна аналогичной задаче о доходности портфеля, выраженной через доходности бумаг и их доли.

Как правило, доходность бумаг колеблется во времени, так что будем считать ее случайной величиной. Пусть mi,σi – средняя ожидаемая доходность и среднее квадратическое отклонение (СКО) этой случайной доходности, т.е. mi=M[di] - математическое ожидание доходности и ri=√Vii, где Vii – вариация или дисперсия i-ой доходности. Будем называть mi, ri соответственно эффективностью и риском i-ой ценной бумаги. Через Vij обозначим ковариацию доходностей ценных бумаг i-го и j-го вида (или корреляционный момент Kij).

Так как доходность составляющих портфель ценных бумаг случайна, то и доходность портфеля есть также случайная величина. Математическте ожидание доходности портфеля есть M[dp]=x1\*M[d1]+…+xn\*M[dn]=Σxi\*mi обозначим его через mp. Дисперсия доходности портфеля есть D[dp]=ΣΣxi\*xj\*Vij. Так же, как и для ценных бумаг, назовем mp эффективностью портфеля, а величину σp=√D[dp] – риском портфеля rp. Обычно дисперсия доходности портфеля называется его вариацией Vp.

Итак, эффективность и риск портфеля выражены через эффективности составляющих его ценных бумаг и их совместные ковариации.

## Портфель Марковица минимального риска.

Существует несколько вариантов задач оптимизации рискового портфеля. Мы рассмотрим только одну. Это так называемый «портфель Марковица». Эта задача была сформулирована и решена американским экономистом Г. Марковицем (H. Markovitz) в 1952 году , за что позднее он получил нобелевскую премию.

Пусть имеются n видов ценных бумаг, из которых инвестор хочет сформировать портфель. Необходимо найти xi, минимизирующие вариацию портфеля

Vp=ΣΣ xi\*xj\*Vij

при условии, что обеспечивается заданное значение эффективности портфеля mp, т.е. Σxi\*mi=mp.

Поскольку xi – доли, то в сумме они должны составлять единицу: Σxi=1.

Оставив за инвестором выбор средней эффективности портфеля и помогая ему минимизировать в этом случае неопределенность, получаем следующую задачу по оптимизации портфеля ценных бумаг:

min ΣΣ xi\*xj\*Vij

Σxi=1

Σmi\*xi=mp

xi≥0,…,xn≥0

Это задача квадратичного программирования. Опустив условия неотрицательности переменных, получаем собственно задачу Марковица.

## Решение.

С помощью функции Лагранжа сведем задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум:

L(x1,…,xn,μ,λ)= ΣΣ Vij\*xi\*xj - λ\*(Σmi –1) - μ\*(Σmi\*xi – mp),

∂L/∂xs=2\*ΣVis\*xi - λ - μ\*ms=0, s=1,…,n. (\*)

производные по λ, μ воспроизводят указанные выше два соотношения, тем самым для (n+2) переменных x1,…,xn, λ, μ получаем (n+2) уравнения.

Запишем полученные уравнения в матричной форме, используя следующие обозначения:

1 x1 m1

e= . x= . m= . x′=(x1,…,xn), m′=(m1,…,mn)

. . .

1 xn mn

Штрих применяется для обозначения операции транспонирования матрицы.

B- матрица ковариаций, B-1 – обратная ей матрица. Следовательно уравнения (\*) примут вид:

B\*x = (λ/2)\*e + (μ/2)\*m,

e′\*x = 1,

m′\*x = mp.

Основное допущение этой модели состоит в том, что между эффективностями m1,…,mn нет линейной связи, поэтому ковариационная матрица B невырождена (|B|<>0), следовательно, существует обратная матрица В-1. Используя этот факт разрешим в матричной форме относительно х:

х = (λ/2)\*В-1\*е + (μ/2)\* В-1\*m, (\*\*)

подставив это решение в первое и второе условия, получим два уравнения для определения λ/2 и μ/2:

(е′\*В-1\*е)\*λ/2 + (е′\*В-1\*m)\*μ/2 =1

(m′\*B-1\*e)\*λ/2 + (m′\*В-1\*m)\*μ/2 =mp.

Решая два последних уравнения по правилу Крамера, находим

λ/2 = ((m′\*В-1\*m)-mp\*(е′\*В-1\*m))/((е′\*В-1\*е)\*(m′\*В-1\*m)-(m′\*B-1\*e)2)

μ/2 = (mp\*(е′\*В-1\*е)-(m′\*B-1\*e))/((е′\*В-1\*е)\*(m′\*В-1\*m)-(m′\*B-1\*e)2)

Подставляя это решение в (\*\*) получаем следующую структуру оптимального портфеля:

[(m′\*В-1\*m)-mp\*(е′\*В-1\*m)]\*В-1\*е + [mp\*(е′\*В-1\*е) - (m′\*B-1\*e)]\*В-1\*m

x\* =

(е′\*В-1\*е)\*(m′\*В-1\*m) - (m′\*B-1\*e)2

Простой подстановкой убеждаемся, что е′\*х\*=1 и m′\*х\*=mp.

Кроме того, находим минимальную дисперсию, соответствующую оптимальной структуре:

[m2p\*(е′\*В-1\*е) – 2\*mp\*(m′\*B-1\*e) + (m′\*В-1\*m)]

D\*p=

[(е′\*В-1\*е)\*(m′\*В-1\*m) - (m′\*B-1\*e)2]

Тогда σ\*p=√ D\*p, что и является минимальным риском портфеля.

Если x\*i≥0, то это означает рекомендацию вложить долю x\*i наличного капитала в ценные бумаги i-го вида. Если же x\*i<0, то содержательно это означает провести операцию “short sale” (“короткая продажа”).

Что это за операция? Инвестор, формирующий портфель, обязуется через какое-то время поставить ценные бумаги i-го вида (вместе с доходом, какой они принесли бы их владельцу за это время). За это сейчас он получает их денежный эквивалент. Эти деньги он присоединяет к своему капиталу и покупает рекомендуемые оптимальным решением ценные бумаги. Так как ценные бумаги других видов (т.е. не i-го вида) более эффективны, то инвестор оказывается в выигрыше.

Математически эта операция значит, что нужно исключить этот вид ценных бумаг из рассмотрения и решить задачу заново.

## Пример.

Дано: m1=11, σ1=4, m2=10, σ2=3, m3=9, σ3=1, ценные бумаги не коррелированы. Определить оптимальный портфель при mp=10.

Ответ: Доли ценных бумаг x1=0,3396; x2=0,3208; x3=0,3396. Минимальный риск σp=1,699. Эффект диверсификации портфеля наглядно виден на данном примере. Портфель имеет такую же эффективность, как если бы он был составлен только из бумаг 2-го вида, но его риск значительно меньше, чем у бумаг 2-го вида (1,699 < 3).

## Программа.

Далее приведена программа, которая рассчитывает структуру портфеля при заданной эффективности и его минимальный риск.

program riski;

uses crt;

type mas=array[1..10] of real;

mas2=array[1..10,1..10] of real;

var a:real;

m,be,bm:mas;

B,E,b1,e1:mas2;

i,k,c,v,l,j,n:integer;

mp,ebe,mbm,ebm,x,mbe:real;

procedure base;

begin

for i:=1 to n do {обращение матрицы B}

begin

for c:=1 to n do {дублирование матриц}

begin

for v:=1 to n do

begin

B1[c,v]:=B[c,v];

e1[c,v]:=e[c,v];

end;

end;

for k:=1 to n do

begin

B[i,k]:=B1[i,k]/b1[i,i]; {делим строки на разрешающий элемент}

E[i,k]:=E1[i,k]/b1[i,i];for l:=1 to n do

begin {находим остальные элементы}

if l<>i then

begin

B[l,k]:=(B1[l,k]-(B1[l,i]\*B1[i,k]/B1[i,i]));

E[l,k]:=(E1[l,k]-(B1[l,i]\*E1[i,k]/B1[i,i]));

end;

end;

end;

end;

for i:=1 to n do {суммирование по строкам, формирование вектора-столбца Be}

begin

for j:=1 to n do

begin

be[i]:=be[i]+e[i,j];

end;

end;

for i:=1 to n do {формирование вектора-столбца Bm}

begin

for j:=1 to n do

begin

Bm[i]:=Bm[i]+m[j]\*e[i,j];

end;

end;

for i:=1 to n do

begin {нахождение констант}

ebe:=ebe+be[i]; {суммирование по стоблцу}

ebm:=ebm+bm[i];

mbm:=mbm+m[i]\*bm[i];

mbe:=mbe+m[i]\*be[i];

end;

end;

procedure vvod ;

label out1, out2, out3, out4, out5;

var z:real; mi,ma:real;

begin

writeln;

writeln(' КУРСОВОЙ ПРОЕКТ');

writeln;

writeln;

writeln(' ПО ДИСЦИПЛИНЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА');

writeln;

writeln(' АВТОР: БОЛДИН СЕРГЕЙ, ФИНМЕН II-3.');

writeln;

writeln(' ТЕМА: ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ РИСКОВОГО ПОРТФЕЛЯ.');

writeln;

writeln;

writeln;

out1:

writeln;

writeln(' Введите количество видов ценных бумаг, из которых вы хотите ');

write(' сформировать портфель (не более 10): ');

readln(n);

if (n<=0) or (n<>int(n)) or (n>10) then

begin

writeln(' Ошибка ввода! Число должно быть натуральным и меньше 10 ! ');

goto out1;

end;

writeln;

writeln(' Введите эффективности (доходности) ценных бумаг:');

for i:=1 to n do

begin

E[i,i]:=1;

out2:

write(' ',i,'-ого вида : ');

readln(m[i]);

if (m[i]<0) then

begin

writeln(' Ошибка ввода! Число должно быть положительным! ');

goto out2;

end;

end;

writeln;

writeln('!!! При вводе рисков и совместных вариаций ценных бумаг следует');

writeln(' быть внимательным, так как программа не расчитана на линейную');

writeln(' связь доходностей ценных бумаг. Поэтому рекомендуется не вводить');

writeln(' пропорциональные риски и совместные вариации ценных бумаг!!!');

writeln;

writeln(' Введите риск (среднее квадратическое отклонение(СКО)) ценных бумаг: ');

for i:=1 to n do

begin

out3:

write(' ',i,'-ого вида : ');

readln(z);

if (z<0) then

begin

writeln(' Ошибка ввода! Число должно быть положительным! ');

goto out3;

end;

b[i,i]:=z\*z;

end;

writeln;

writeln(' Введите совместную вариацию (корреляционный момент) ценных бумаг.');

writeln(' Она не должна быть больше произведения СКО этих бумаг.');

for i:=1 to n do

begin

for j:=i+1 to n do {ввод матрицы ковариаций}

begin

out4:

write(' ',i,'-го и ',j,'-го вида: ');

readln(z);

if abs(z)>=sqrt(b[i,i])\*sqrt(b[j,j]) then

begin

writeln(' Ошибка ввода! Число должно быть положительным и меньше произведения СКО этих бумаг! ');

goto out4;

end;

b[i,j]:=z;

b[j,i]:=z;

if i<>j then begin E[i,j]:=0; end;

end;

end;

writeln;

ma:=0;

for i:=1 to n do

begin

if m[i]>ma then ma:=m[i];

end;

mi:=100000000;

for i:=1 to n do

begin

if m[i]<mi then mi:=m[i];

end;

writeln(' Введите желаемую эффективность портфеля. ');

write(' Она должна быть в пределах эффективностей ценных бумаг: ');

out5:

readln(mp);

if (mp<mi) or (mp>ma) then

begin

writeln(' Ошибка ввода!');

write(' Число должно быть в пределах эффективностей ценных бумаг!: ');

goto out5;

end;

end;

procedure vivod ;

begin

writeln;

writeln(' Структура портфеля. Доли ценных бумаг.');

for i:=1 to n do

begin

x:=((mbm-mp\*ebm)\*be[i]+(mp\*ebe-mbe)\*bm[i])/(ebe\*mbm-mbe\*mbe);

writeln(' ',i,'-го вида: ',x:6:5);

if x<0 then

begin

writeln(' Так как доля бумаг ',i,'-го вида отрицательна, то необходимо ');

writeln(' провести сделку "short sale", исключить бумаги этого вида из портфеля');

writeln(' и решить задачу заново.');

end;

end;

writeln;

writeln(' Минимальный риск портфеля: ',sqrt((mp\*mp\*ebe-2\*mp\*mbe+mbm)/(ebe\*mbm-mbe\*mbe)):6:5);

end;

begin

clrscr;

textcolor(yellow);

textbackground(blue);

vvod;

base;

vivod;

readln;

end.

## Список литературы:

1. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: «Юнити» 1998.
2. Малыхин В.И. Финансовая математика. М.: «Юнити» 2000.