**Реферат**

**на тему:**

**"Теоремы Ролля, Коши, Лагранжа. Правило Лопиталя"**

**1. Теорема Ролля**

Знание производной некоторой функции позволяет судить о характерных особенностях в поведении этой функции. В основе всех таких исследований лежат некоторые простые теоремы, называемые теоремами о среднем в дифференциальном исчислении.

Начнем рассмотрение таких теорем с теоремы, связываемой с именем французского математика Ролля (1652–1719).

Теорема 1.1. *Если функция  непрерывна на отрезке , дифференцируема во всех его внутренних точках, а на концах отрезка ,  обращается в ноль, то существует, по крайней мере, одна точка , в которой* .

Доказательство. Так как функция непрерывна на отрезке , то, согласно свойству 11.1.1, она должна достигать хотя бы один раз на этом отрезке своего минимума  и максимума  (рис. 1.1).

Если , функция постоянна, то есть . Но в этом случае  для любого .

В общем случае , и хотя бы одно из этих чисел не равно нулю. Предположим для определенности, что . Тогда существует точка , в которой .



Рис. 1.1

Так как рассматриваемое значение  является максимальным, то для него справедливо, что  для  и .

Рассмотрим пределы

 для 

и

 для .

Так как оба предела равны производной функции  в одной и той же точке , то они равны между собой. Значит, из одновременности  и  следует, что , что и требовалось доказать.

Следует отметить, что данная теорема справедлива и в том случае, когда на концах отрезка  функция не обращается в ноль, но принимает равные значения . Доказательство проводится аналогично.

Геометрический смысл данной теоремы следующий: если непрерывная кривая пересекает ось  в двух точках ,  или принимает в них равные значения, то, по крайней мере, в одной точке между  и  касательная к кривой параллельна оси .

Необходимо отметить, что если не во всех точках  у рассматриваемой функции существует производная, то теорема может не выполняться. Это касается, например, функции  (рис. 1.2):



Рис. 1.2

Данная функция непрерывна на отрезке  и обращается в ноль на его концах, но ни в одной точке внутри отрезка производная не равна нулю.

**2. Теорема Лагранжа**

Результаты теоремы Ролля используются при рассмотрении следующей теоремы о среднем, принадлежащей Лагранжу (1736–1813).

Теорема. *Если функция  непрерывна на отрезке  и дифференцируема во всех его внутренних точках, то существует, по крайней мере, одна точка , в которой* .

Доказательство. Рассмотрим график функции  (рис. 2.1).

Проведем хорду, соединяющую точки  и , и запишем ее уравнение. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки на плоскости, получим:

,

откуда:



Рис. 2.1

 и .

Составим теперь вспомогательную функцию, вычтя из уравнения кривой уравнение хорды:

.

Полученная функция  непрерывна на отрезке  и дифференцируема во всех его внутренних точках. Кроме того, вычисление  в точках  и  показывает, что . Значит, функция  на отрезке  удовлетворяет требованиям теоремы Ролля. Но в этом случае существует такая точка , в которой .

Вычислим производную функции :

.

Согласно теореме Ролля в точке  производная , то есть  и

,

что и требовалось доказать.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа следующий: внутри отрезка  существует, по крайней мере, одна точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей кривую на данном отрезке. В частности, при  теорема переходит в теорему Ролля.

Теорему Лагранжа часто записывают в следующем виде:

,

то есть приращение функции равно приращению аргумента, умноженному на производную функции в некоторой внутренней точке. В связи с этим теорему Лагранжа называют также теоремой о конечных приращениях.

**3. Теорема Коши**

Рассмотрим, наконец, третью теорему о среднем, принадлежащей Коши (1789–1859), которая является обобщением теоремы Лагранжа.

Теорема. *Если функции  и  непрерывны на отрезке  и дифференцируемы во всех его внутренних точках, причем  не обращается в ноль ни в одной из указанных точек, то существует, по крайней мере, одна точка , в которой* .

Доказательство. Так как  во всех точках , то отсюда следует, что . В противном случае, как следует из теоремы Ролля, существовала хотя бы одна точка , в которой .

Составим вспомогательную функцию

.

Данная функция непрерывна на отрезке  и дифференцируема во всех его внутренних точках. Кроме того, вычисление ее в точках  и  дает: . Значит, функция  удовлетворяет требованиям теоремы Ролля, то есть существует хотя бы одна точка , в которой .

Вычислим производную :

.

Из условия  следует, что

 и ,

что и требовалось доказать.

В случае, когда , теорема Коши переходит в формулировку теоремы Лагранжа.

**4. Правило Лопиталя**

На основании теоремы Коши о среднем можно получить удобный метод вычисления некоторых пределов, называемый правилом Лопиталя (1661–1704).

Теорема. *Пусть функции  и  непрерывны и дифференцируемы во всех точках полуинтервала  и при  совместно стремятся к нулю или бесконечности. Тогда, если отношение их производных имеет предел при , то этот же предел имеет отношение и самих функций, то есть* .

Проведем доказательство данной теоремы только для случая, когда . Так как пределы у обеих функций одинаковы, то доопределим их на отрезке , положив, что при  выполняется равенство .

Возьмем точку . Так как функции  и  удовлетворяют теореме Коши (п. 2.14), применим ее на отрезке :

, где .

Так как , то

.

Перейдем в данном равенстве к пределу:

.

Но если , то и , находящееся между точками  и , будет стремится к , значит

.

Отсюда, если , то и , то есть

,

что и требовалось доказать.

Если при  , то снова получается неопределенность вида  и правило Лопиталя можно применять снова, то есть



Доказательство правила Лопиталя для случая  проводится сложнее, и мы его рассматривать не будем.

При раскрытии неопределенностей типа , , , ,  правило Лопиталя применять непосредственно нельзя. Вначале все эти неопределенности необходимо преобразовать к виду  или .

Правило Лопиталя может быть использовано при сравнении роста функций, в случае когда . Наибольший практический интерес здесь представляют функции , , . Для этого найдем пределы их отношений:

1) , значит,  растет быстрее, чем ;

2) , значит,  растет быстрее, чем ;

3) , значит,  растет быстрее, чем .

Отсюда следует, что быстрее всего растет , затем  и, наконец, .

**Литература**

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа» изд. 5, 1977.
2. Зайцев И.А. Высшая математика. ДРОФА, 2005. – 400 с.
3. Краснов М. Вся высшая математика т. 1 изд. 2. Едиториал УРСС, 2003. – 328 с.
4. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И., Шикин Е.В. Вся высшая математика Интегральное исчисление. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Дифференциальная геометрия Том 2.: Учебник – 3-е изд. ЛКИ, 2007.
5. Мироненко Е.С. Высшая математика. М: Высшая школа, 2002. – 109 с.