Невласні інтеграли

# Поняття та різновиди невласних інтегралів

Згідно з теоремою існування визначеного інтеграла цей інте­грал існує, якщо виконані умови:

1) відрізок інтегрування [а, b] скінчений;

2) підінтегральна функція f(x) неперервна або обмежена і має скінченну кількість точок розриву. Якщо хоч би одна із умов не виконується, то визначений інтеграл називають невласним.

Якщо не виконується перша умова, тобто b = ∞ або а = ∞ або а = -∞ та b = ∞, то інтеграли називають невласними інтегралами з нескінченними межами.

Якщо не виконується лише друга умова, то підінтегральна функція f(x)має точки розриву другого роду на відрізку інтегрування [а, b]. В цьому випадку  називають невласним інтегралом від розривної функції або від функції, необмеженої в точках відрізку інтегрування.

1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).

Нехай функція f(х) визначена на проміжку [a; +∞) і інтегрована на будь-якому відрізку [а, b], де — ∞ < a < b < +∞. Тоді, якщо існує скінченна границя

 (51)

її називають невласним інтегралом першого роду і позначають так:

 (52)

Таким чином, за означенням

 (53)

У цьому випадку інтеграл (52) називають збіжним, а підінтегральну функцію f(x)— інтегровною на проміжку [а; +∞).

Якщо ж границя (51) не існує або нескінченна, то інтеграл (52) називається також невласним, але розбіжним, а функція f(х) — неінтегровною на [a; +∞).

Аналогічно інтегралу (53) означається невласний інтеграл на проміжку (-∞; b]:

 (54)

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

 (55)

де с — довільне дійсне число. Отже, інтеграл зліва у формулі (55) існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа. Можна довести, що інтеграл, визначений формулою (55), не залежить від вибору числа с.

З наведених означень видно, що не­власний інтеграл не є границею інтегра­льних сум, а є границею означеного ін­теграла із змінною межею інтегрування.

Зауважимо, що коли функція f(x)неперервна і невід'ємна на проміжку [а; +∞) і коли інтеграл (53) збігається, то природно вважати, що він виражає площу необмеженої області (рис. 7.12).

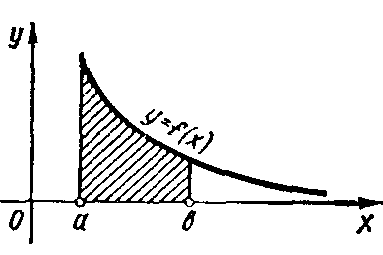


рис. 7.12

Приклад.

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

а)  б) 

в)  д) 

а) За формулою (53) маємо



Отже інтеграл а) збігається.

б) 

Оскільки ця границя не існує при а → -∞, то інтеграл б) розбіжний.

в) 

Отже інтеграл в) розбіжний,

г) Якщо  = 1, то



Якщо ≠ 1, то



Отже інтеграл г) є збіжним при  > 1 і розбіжним при  ≤ 1.

У розглянутих прикладах обчислення невласного інтеграла грунтувалося на його означенні. Проте у деяких випадках немає необхідності обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні. Наводимо без доведення деякі ознаки збіжності.

Теорема 1. Якщо на проміжку [а; +∞) функції f(x) і g(x) неперервні і задовольняють умову 0 ≤ f(x)≤ g(x), то із збіжності інтеграла

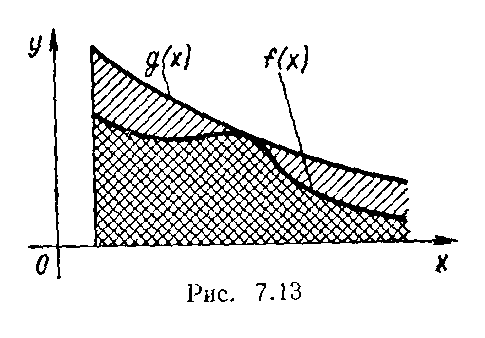
 (56)

випливає збіжність інтеграла

 (57)

а із розбіжності інтеграла (57) випливав розбіжність інтеграла (56).

Наведена теорема має простий геометричний зміст (рис. 7.13); якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченне число, то площа меншої області є також скінченне число; якщо пло­ща меншої області нескінченно велика величина, то площа більшої області є також нескінченно велика величина.



Приклад

Дослідити на збіжність інтеграли:

а) ; 

а) Оскільки :



і інтеграл  збігається, то за теоремою і заданий інтеграл також збігається.

б) Цей інтеграл розбігається, бо  :



і інтеграл  розбігається.

Теорема 2. Якщо існує границя

 , ,

то інтеграли (56) і (57) або одночасно обидва збігаються, або одно­часно розбігаються.

Ця ознака іноді виявляється зручнішою, ніж теорема 1, бо не потребує перевірки нерівності 0 ≤ f(x)≤ g(х).

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл



Оскільки інтеграл  збігається і



то заданий інтеграл також збігається.

В теоремах 1 і 2 розглядались невласні інтеграли від невід'єм­них функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива така теорема.

Теорема 3. Якщо інтеграл  збігається, то збігається й інтеграл .

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл .

Тут підінтегральна функція знакозмінна. Оскільки



то заданий інтеграл збігається.

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла  не випливає, взагалі кажучи, збіжність інтеграла . Ця обставина виправдовує такі означення.

Якщо разом з інтегралом  збігається й інтеграл , то інтеграл  називають абсолютно збіжним, а функцію f(x) — абсолютно інтегровною на проміжку [а; +∞).

Якщо інтеграл  збігається, а інтеграл  розбігається, то інтеграл  називають умовно (або неабсолютно) збіжним.

Тепер теорему 3 можна перефразувати так: абсолютно збіжний інтеграл збігається .

Отже, для знакозмінної функції викладені тут міркування дають змогу встановити лише абсолютну збіжність інтеграла. Якщо ж невласний інтеграл збігається умовно, то застосовують більш глибокі ознаки збіжності [II].

Приклад

Дослідити на збіжність інтеграл



Оскільки



то за теоремою 3 інтеграл  збігається.

Отже, збігається, причому абсолютно, і заданий інтеграл, а функція f(x)= на проміжку [0; +∞) є абсолютно інтегровною.

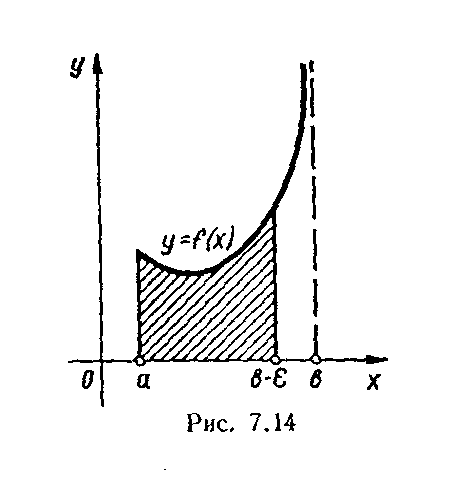
2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).

Нехай функція f(x)визначена на про­міжку [а, b). Точку х = b назвемо особливою точкою функції f(х), якщо f(x) *→* ∞ при х *→* b - 0 (рис. 7.14). Нехай функція f(x)інтегровна на відрізку [а; b — ] при довільному  > 0 такому, що b - > ; тоді, якщо існує скінченна границя

 (58)

її називають невласним інтегралом другого роду і позначають так:

 (59)

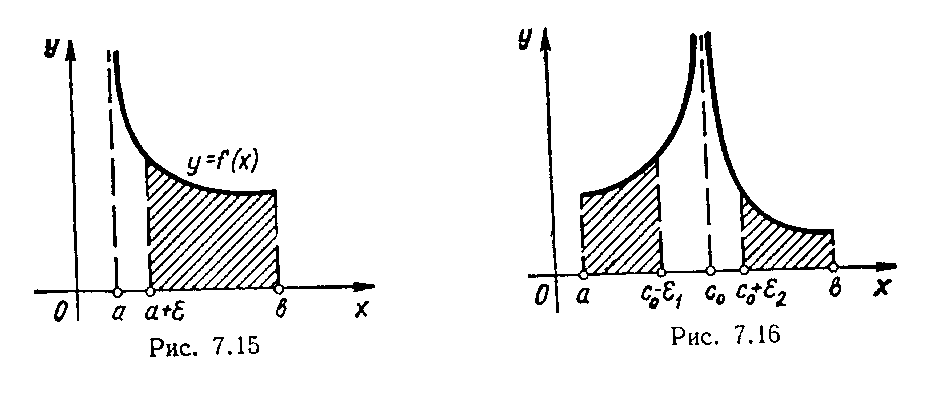


Отже, за означенням



У цьому випадку кажуть, що інтеграл (59) існує або збігається. Якщо ж границя (58) нескінченна або не існує, то інтеграл (59) також називають невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно якщо х =  — особлива точка (рис. 7.15), то невласний інтеграл визначається так:





Якщо f(x) необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки с0   (а; b), то за умови існування обох невласних інтегралів  і  за означенням покладають (рис. 7.16).



Нарешті, якщо а та b — особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів  і  за означенням покладають



де с — довільна точка інтервалу (а; b).

Приклад

Обчислити невласні інтеграли:

а) ; б) 

а) 

Отже, інтеграл а) збіжний.

б) Якщо  ≠ 1, то



Якщо  = 1, то



Таким чином, інтеграл б) збігається при 0 <  < 1 і розбігається при  ≥ 1.

Бета-функція, або інтеграл Ейлера першого роду, визначається формулою

 (91)

Можна довести, що для всіх   (0, +∞) і   (0, +∞) інтег­рал (91) збігається. Варто зазначити, що відповідний невизначений інтеграл , згідно з теоремою Чебишева (п. 1.7), виражається через елементарні функції лише в окремих випадках. Отже, бета-функція не є елементарною.

Гамма-функцією, або інтегралом Ейлера другого роду, називається інтеграл

 (92)

Покажемо, що невласний інтеграл (92) при  > 0 збігається. Маємо



Перший інтеграл в правій частині цієї рівності збігається, бо



Другий інтеграл також збігається. Справді, якщо n — довільне натуральне число таке, що n >  — 1, то

,

в чому можна пересвідчитись, обчислюючи останній інтеграл части­нами і враховуючи, що



Отже, інтеграл (92) при  > 0 збігається і визначає деяку функцію, яку і називають гамма-функцією Г().

Обчислимо значення Г() при а  N. Якщо  = 1, то

 (93)

Нехай n + 1  інтегруючи частинами, дістанемо



звідки

Г(n +1) = nГ(n) (94)

З рівностей (93) і (94) випливає, що nN:

Г(n +1) = n!

Таким чином, гамма-функція для цілих значень n  N виражається через n!. Проте вона визначена і для нецілих додатних значень аргументу, тобто продовжує факторіальну функцію з дискретних значень аргументу на неперерв­ні. Гамма-функція не є елементарною функцією. Графік цієї функції зображено на рис. 7.35. Властивості гамма-функції досить добре ви­вчені і значення її протабульовані в багатьох довідниках, наприклад в [19].

Наводимо без доведення формулу Стірлінга для гамма-функції:



де  > 0 і 0 <  () < 1. Якщо в цій рівності покласти  = n і помножити її на n, дістанемо

 (95)

Бета- і гамма-функції пов'язані між собою співвідношенням

 (96)

Приклади

1. Знайти Г 

Згідно з формулою (96), при  =  =  маємо



отже, Г=.

2. Обчислити інтеграл Ейлера — Пуассона 

Враховуючи результат попереднього прикладу, дістанемо



3. Виразити інтеграл  через бета-функцію наближено при  = 3,  = .

Маємо



Зокрема, при  = 3 і  =  згідно з формулою (96) дістанемо



Завдання для самоконтролю

1. Які інтеграли називаються інтегралами, залежними від параметра?
2. Сформулювати теореми про неперервність, диференціювання та інтегрування Інтеграла, залежного від параметра.
3. 3. Дати означення гамма-функції Г().
4. Довести, що Г(n +1) = n!, n  N.
5. Дати означення бета-функції В(,). Як пов'язані між собою бета- та гам­ма-функції?
6. Довести, що



Вказівка. Скористатись підстановкою sin x = .