**Математическое программирование**

**Задача 1**

Для производства двух видов изделий А и В используется три типа технологического оборудования. Для производства единицы изделия А оборудование первого типа используется 2 часа, оборудование второго типа – 1 час, оборудование третьего типа – 3 часа. Для производства единицы изделия В оборудование первого типа используется 2 часа, оборудование второго типа – 2 часа, оборудование третьего типа – 1 час.

На изготовление всех изделий предприятие может использовать оборудование первого типа не более чем 48 часа, оборудование второго типа – 38 часов, оборудование третьего типа – 54 часов.

Прибыль от реализации единицы готового изделия А составляет 2 денежные единицы, а изделия В – 3 денежные единицы.

Составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации. Решить задачу симплекс-методом путем преобразования симплекс-таблиц. Дать геометрическое истолкование задачи, используя для этого ее формулировку с ограничениями – неравенствами.

Решение.

Данная задача является задачей линейного программирования. Под планом производства понимается: сколько изделий А и сколько изделий В надо выпустить, чтобы прибыль была максимальна.

Прибыль рассчитывается по формуле: 

Запишем математическую модель задачи:



Решим данную задачу графически.

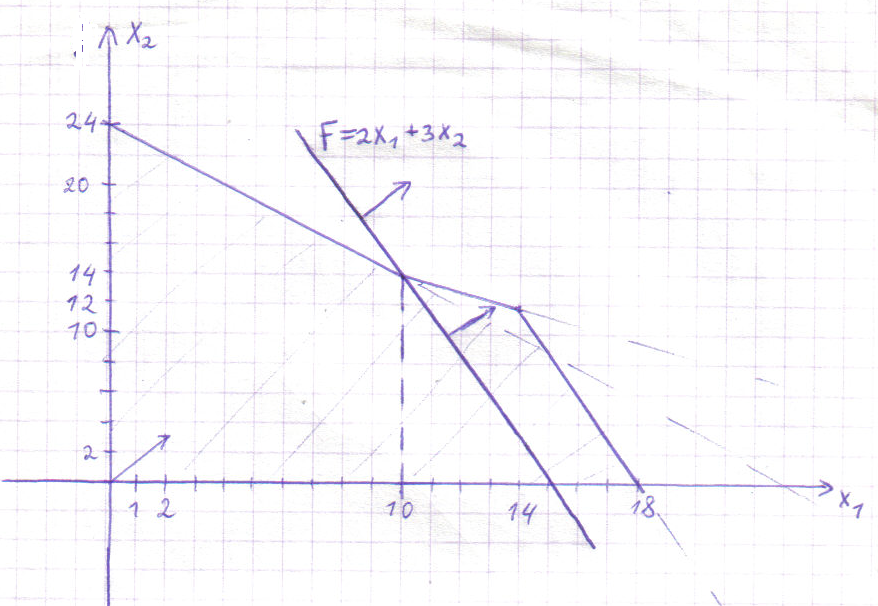
Для этого построим на плоскости области, описываемые ограничениями-неравенствами, и прямую , которая называется целевой функцией.



Три записанных выше неравенства ограничивают на плоскости многоугольник, ограниченный слева и снизу координатными осями (т.к. искомое количество изделий положительно).

График целевой функции передвигается в направлении, обозначенном стрелкой (в направлении своего градиента), до тех пор, пока не достигнет граничной точки многоугольника – в нашем случае это точка – (10 ; 14). В этой точке целевая функция будет достигать максимума.





Решим эту задачу симплекс-методом. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам, введя дополнительные переменные .





Составляем симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | Cб | В | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| А1 | А2 | А3 | А4 | А5 |
| А3 | 0 | 48 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| А4 | 0 | 38 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| А5 | 0 | 54 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Fi - Ci |  | 0 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 |

В графе Базис записываются вектора переменных, принимаемые за базисные. На первом этапе это – А3, А4, А5. Базисными будут переменные, каждая из которых входит только в одно уравнение системы, и нет такого уравнения, в которое не входила бы хотя бы одна из базисных переменных.

В следующий столбец записываются коэффициенты целевой функции, соответствующие каждой переменной. Столбец В – столбец свободных членов. Далее идут столбцы коэффициентов Аi при i –й переменной.



Под столбцом свободных членов записывается начальная оценка



Остальные оценки записываются под столбцами соответствующих векторов .







Преобразуем симплекс-таблицу следующим образом:

Шаг 1: Проверяется критерий оптимальности, суть которого состоит в том, что все оценки должны быть неотрицательны. В нашем случае этот критерий не выполнен, поэтому переходим ко второму шагу.

Шаг 2: Для отрицательных оценок вычисляются величины:









Из этих элементов выбирается тот, для которого вычисленное произведение минимально, в нашем случае -57 минимально, поэтому в качестве разрешающего элемента выбирается второй элемент второго столбца – 2 (выделен в таблице).

Шаг 3: Вторая строка таблицы делится на 2

От элементов строки 1 отнимает соответствующие элементы строки 2, умноженные на 2.

От элементов строки 3 отнимает соответствующие элементы строки 2.

От элементов строки 4 отнимает соответствующие элементы строки 2, умноженные на -3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | Cб | В | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| А1 | А2 | А3 | А4 | А5 |
| А3 | 0 | 10 | 1 | 0 | 1 | - | 0 |
| А5 | 0 | 19 | 0,5 | 1 | 0 | 0,5 | 0 |
| А2 | 3 | 35 | 2,5 | 0 | 0 | -0,5 | 1 |
| Fi - Ci |  | 57 | -0,5 | 0 | 0 | 1,5 | 0 |

Таким образом, новыми базисными переменными становятся А3, А5, А2.

Возвращаемся к шагу 1 и повторяем весь процесс.

Проверяется критерий оптимальности. Отрицательная оценка только одна – в столбце А1.

Вычисляем:



Разрешающим элементом будет первый элемент первого столбца – 1.

Новыми базисными переменными становятся A5, A2, A1

От элементов строки 2 отнимает соответствующие элементы строки 1, умноженные на 0,5.

От элементов строки 3 отнимает соответствующие элементы строки 1, умноженные на 2,5.

От элементов строки 4 отнимает соответствующие элементы строки 1, умноженные на -0,5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | Cб | В | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| А1 | А2 | А3 | А4 | А5 |
| А5 | 0 | 10 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| А2 | 3 | 14 | 0 | 1 | -0,5 | 1 | 0 |
| А1 | 2 | 10 | 0 | 0 | -2,5 | 2 | 1 |
| Fi - Ci |  | 62 | 0 | 0 | 1,5 | 1 | 0,5 |

Отрицательных оценок нет, то есть критерий оптимальности выполнен.

Таким образом, получается искомое значение целевой функции

F(10; 14; 0; 0; 10) = 62, т.е. возвращаясь к системе неравенств, получаем:



Ответы, полученные различными методами, совпадают.

Ответ: хопт = ( 10 , 14) Значение функции : F = 62

**Задача 2**

Имеются три пункта отправления А1,А2,А3 однородного груза и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 его назначения. На пунктах А1,А2,А3 находится груз в количествах 50, 30, 70 тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно 20, 30, 50, 30, 20 тонн груза. Расстояния в сотнях километрах между пунктами отправления и назначения приведены в матрице D:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления | Пункты назначения | | | | |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
| А1 | 9 | 5 | 1 | 1 | 9 |
| А2 | 7 | 1 | 4 | 9 | 4 |
| А3 | 5 | 3 | 4 | 9 | 9 |

Найти такой план перевозок, при котором общие затраты на перевозку грузов будут минимальными.

Указания: 1) считать стоимость перевозок пропорциональной количеству груза и расстоянию, на которое этот груз перевозится, т.е. для решения задачи достаточно минимизировать общий объем плана, выраженный в тонно-километрах;

2) для решения задачи использовать методы северо-западного угла и потенциалов.

Решение.

Составим математическую модель задачи:

Обозначим  - количество груза, перевезенного из пункта отправления i в пункт назначения j.

Получим следующие ограничения (т.к. весь груз должен быть вывезен, и все потребности удовлетворены полностью):

При этом должна быть минимизирована целевая функция



Построим опорный план методом северо-западного угла:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления | Пункты назначения | | | | | Запасы |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
| А1 | 9  *20* | 5  *30* | 1 | 1 | 9 | 50 |
| А2 | 7 | 1 | 4  *30* | 9 | 4 | 30 |
| А3 | 5 | 3 | 4  *20* | 9  *30* | 9  *20* | 70 |
| Потребности | 20 | 30 | 50 | 30 | 20 | 150 |

Принцип заполнения таблицы состоит в том, что, начиная с крайней левой верхней ячейки (принцип северо-западного угла), количество грузов вписывается в таблицу так, чтобы потребности полностью удовлетворялись или груз полностью вывозился.

Построим систему потенциалов. Ui - потенциалы, соответствующие поставщикам, Vi- потенциалы, соответствующие потребителям.

Полагаем U1 =0, а далее Ui + Vi = dij для занятых клеток таблицы.









|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления |  | Пункты назначения | | | | | Запасы |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
|  | V1 =9 | V2 =5 | V3 =4 | V4 =9 | V5 =9 |  |
| А1 | U1 =0 | 9  *20* | 5  *30* | 1 | 1 | 9 | 50 |
| А2 | U2 =0 | 7 | 1 | 4  *30* | 9 | 4 | 30 |
| А3 | U3 =0 | 5 | 3 | 4  *20* | 9  *30* | 9  *20* | 70 |
| Потребности |  | 20 | 30 | 50 | 30 | 20 | 150 |

Проверим критерий оптимальности :  для свободных клеток.





Из тех условий, где критерий не выполняется, выбираем то условие, где разница максимальна. Это – ячейка (1 , 4). Перебросим в ячейку (1 , 4) 20 единиц груза из ячейки (1 , 1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления |  | Пункты назначения | | | | | Запасы |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
|  | V1 =9 | V2 =5 | V3 =4 | V4 =9 | V5 =9 |  |
| А1 | U1 =0 | 9 | 5  *30* | 1 | 1  20 | 9 | 50 |
| А2 | U2 =0 | 7 | 1 | 4  *30* | 9 | 4 | 30 |
| А3 | U3 =0 | 5  20 | 3 | 4  *20* | 9  *10* | 9  *20* | 70 |
| Потребности |  | 20 | 30 | 50 | 30 | 20 | 150 |

Чтобы компенсировать недостаток в третьей строке, перебросим те же 20 единиц груза из ячейки (3 , 4) в ячейку (3 , 1).

Получили новую таблицу, для которой повторяем расчет потенциалов:

Полагаем U1 =0, а далее Ui + Vi = dij для занятых клеток таблицы.









|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления |  | Пункты назначения | | | | | Запасы |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
|  | V1 =5 | V2 =5 | V3 =4 | V4 =1 | V5 =9 |  |
| А1 | U1 =0 | 9 | 5  *30* | 1 | 1  20 | 9 | 50 |
| А2 | U2 =0 | 7 | 1 | 4  *30* | 9 | 4 | 30 |
| А3 | U3 =0 | 5  20 | 3 | 4  *20* | 9  *10* | 9  *20* | 70 |
| Потребности |  | 20 | 30 | 50 | 30 | 20 | 150 |

Проверим критерий оптимальности :  для свободных клеток.





Из тех условий, где критерий не выполняется, выбираем то условие, где разница максимальна. Это – ячейка (2 , 5). Перебросим в ячейку (2 ,5) 20 единиц груза из ячейки (1 , 2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления |  | Пункты назначения | | | | | Запасы |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
|  | V1 =5 | V2 =5 | V3 =4 | V4 =1 | V5 =9 |  |
| А1 | U1 =0 | 9 | 5  *10* | 1  20 | 1  20 | 9 | 50 |
| А2 | U2 =0 | 7 | 1 | 4  *10* | 9 | 4  *20* | 30 |
| А3 | U3 =0 | 5  20 | 3  *20* | 4  *20* | 9  *10* | 9 | 70 |
| Потребности |  | 20 | 30 | 50 | 30 | 20 | 150 |

Получили новую таблицу, для которой повторяем расчет потенциалов:

Полагаем U1 =0, а далее Ui + Vi = dij для занятых клеток таблицы.







|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления |  | Пункты назначения | | | | | Запасы |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
|  | V1 =2 | V2 =5 | V3 =1 | V4 =1 | V5 =1 |  |
| А1 | U1 =0 | 9 | 5  *10* | 1  *20* | 1  *20* | 9 | 50 |
| А2 | U2 =3 | 7 | 1 | 4  *10* | 9 | 4  *20* | 30 |
| А3 | U3 =3 | 5  20 | 3  *20* | 4  *20* | 9  *10* | 9 | 70 |
| Потребности |  | 20 | 30 | 50 | 30 | 20 | 150 |

Проверим критерий оптимальности :  для свободных клеток.





Из тех условий, где критерий не выполняется, выбираем то условие, где разница максимальна. Это – ячейка (2 , 2). Перебросим в ячейку (2 ,2) 10 единиц груза из ячейки (1 , 2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления |  | Пункты назначения | | | | | Запасы |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
|  | V1 =2 | V2 =5 | V3 =1 | V4 =1 | V5 =1 |  |
| А1 | U1 =0 | 9 | 5 | 1  20 | 1  30 | 9 | 50 |
| А2 | U2 =3 | 7 | 1  10 | 4 | 9 | 4  *20* | 30 |
| А3 | U3 =3 | 5  20 | 3  *20* | 4  *30* | 9 | 9 | 70 |
| Потребности |  | 20 | 30 | 50 | 30 | 20 | 150 |

Получили новую таблицу, для которой повторяем расчет потенциалов:

Полагаем U1 =0, а далее Ui + Vi = dij для занятых клеток таблицы.







|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления |  | Пункты назначения | | | | | Запасы |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
|  | V1 =3 | V2 =1 | V3 =1 | V4 =1 | V5 =4 |  |
| А1 | U1 =0 | 9 | 5 | 1  20 | 1  30 | 9 | 50 |
| А2 | U2 =0 | 7 | 1  10 | 4 | 9 | 4  *20* | 30 |
| А3 | U3 =2 | 5  20 | 3  *20* | 4  *30* | 9 | 9 | 70 |
| Потребности |  | 20 | 30 | 50 | 30 | 20 | 150 |

Проверим критерий оптимальности :  для свободных клеток.





Критерий выполнен, значит, полученное решение оптимально.

Найдем минимальную стоимость перевозок.



Ответ: 

**Задача 3**

Дана задача выпуклого программирования. Требуется:

1) найти решение графическим методом

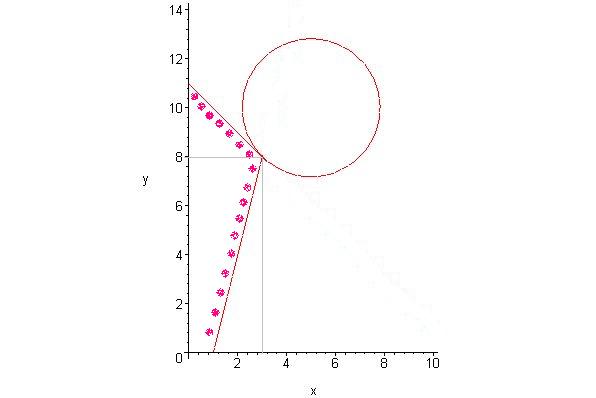
2) написать функцию Лагранжа данной задачи и найти ее седловую точку, используя решение задачи, полученное графически.





Решение.

Графическое решение задачи следующее:



Система неравенств определяет область, ограниченную двумя прямыми и координатными осями. График целевой функции представляет собой окружность переменного радиуса с центром в точке (5, 10). Значение целевой функции графически представляет собой квадрат радиуса этой окружности. Минимальным радиусом, удовлетворяющим системе ограничений, будет такой радиус, который обеспечивает касание окружности с границей области так, как это показано на рисунке.

Искомая точка определяется как решение системы уравнений

Получили точку (3 , 8), значение целевой функции в этой точке равно 

Запишем задачу в традиционном виде:





Функция называется функцией Лагранжа, а переменные  - коэффициентами Лагранжа.

Точка  называется седловой точкой функции Лагранжа, если для любых  выполняются неравенства:



Если функции f, g дифференцируемы, то условия определяющие седловую точку (условия Куна-Таккера):



В данном случае получаем:







Подставим в эти выражения значения:





Получаем



Седловая точка функции Лагранжа: 

Проверим условие cедловой точки:



Условия выполнены, седловая точка.

Ответ: 

**Задача 4**

Для двух предприятий выделено 900 единиц денежных средств. Как распределить все средства в течение 4 лет, чтобы доход был наибольшим, если известно, что доход от х единиц, вложенных в первое предприятие равен , а доход от у единиц, вложенных во второе предприятие равен . Остаток средств к концу года составляет - для первого предприятия,  - для второго предприятия. Решить задачу методом динамического программирования.

Решение.

Процесс распределения средств разобьем на 4 этапа – по соответствующим годам.

Обозначим  - средства, которые распределяются на k–ом шаге как сумма средств по предприятиям.

Суммарный доход от обоих предприятий на k–ом шаге:



Остаток средств от обоих предприятий на k–ом шаге:



Обозначим  - максимальный доход, полученный от распределения средств между двумя предприятиями с k-го шага до конца рассматриваемого периода.

Рекуррентные соотношения Беллмана для этих функций





Проведем оптимизацию, начиная с четвертого шага:

4-й шаг.

Оптимальный доход равен:

 , т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т.е. при .

3-й шаг.



т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т.е. при .

2-й шаг.

 т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т.е. при .

1-й шаг.



т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т.е. при .

Результаты оптимизации:

Определим количественное распределение средств по годам:

Так как , , получаем







Представим распределение средств в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| предприятие | год | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 900 | 90 | 9 | 0,9 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

При таком распределении средств за 4 года будет получен доход, равный 

Ответ: 