Факультет дистанционного обучения

Томский государственный университет

систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР)

Кафедра экономики

Контрольная работа № 1

по дисциплине «математические модели в экономике »

выполнена по методике М.Г. Сидоренко «математические модели в экономике»

Вариант-1

Выполнил:

студент ФДО ТУСУР

гр.: з-828-Б

специальности 080105

Афонина Ю.В,

1 декабря 2010 г.

Г. Нефтеюганск

2010г

***Задание 1***

В пространстве трех товаров рассмотрите бюджетное множество при векторе цен P и доходе Q. Описать его и его границу с помощью обычных и векторных неравенств и равенств, изобразите бюджетное множество и его границу графически. В ответ дать число, равное объему бюджетного множества.

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | 1 |
| Данные | P = (1,3,4)  Q = 24 |

x1

P

A(3)

B(1)O

O

x3

C(4)

x2

Цена товара , товара, товара  и  бюджетное множество  есть пирамида ОАВС. Точка А имеет координату , точка В имеет координату , точка С имеет координату .

Бюджетное множество B(P,Q) и его граница G(P,Q) зависят от цен и дохода.

Бюджетное множество и его границу можно определить с помощью обычных неравенств и равенств так:



и с помощью векторных равенств и неравенств



Объем бюджетного множества равен объему построенной пирамиды ОАВС.

Объему пирамиды ОАВС равен одной трети произведения площади основания на высоту:



где *S* – площадь основания, *H* – высота пирамиды.

В рассматриваемом случае высота *Н* равна 24.

Площадь основания равна Ѕ АВ умножить на ВС и на синус угла между ними.



***Задание 2***

Даны зависимости спроса D и предложения S от цены. Найдите равновесную цену, при которой выручка максимальна и эту максимальную выручку.

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Данные |
| 1 | D = 1000 – 10p; S = 100 +10p |

*Решение:*

Точка равновесия характеризуется равенством спрос и предложения, т.е. 1000 – 10p = 100+10p. Равновесная цена p\* = 45 и выручка при равновесной цене W(p\*) = p\* \* D(p\*) = p\* \* S(p\*) = 24750.

При цене p > p\* объем продаж и выручка определяется функцией спроса, при p < p\* - предложения. Необходимо найти цену , определяющую максимум выручки:



p\*(1000 – 10p) – функция имеет максимум в точке 50, W(50)=25000

p\*(100 - 10p) –функция максимальна в точке 5, W(5)=250

Таким образом, максимальная выручка W(р) =25000 достигается не при равновесной цене.

***Задание 3***

Найдите решение матричной игры (оптимальные стратегии и цену игры).

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Игра |
| 1 |  |

Сначала необходимо проверить наличие седловой точки. Седловой точки нет.

Обозначим стратегию Первого , искомую оптимальную стратегию Второго .

Выигрыш Первого есть случайная величина с таким рядом распределения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| W(x,y): | 2 | -3 | -2 | 2 |
| xy | x(1-y) | (1-x)y | (1-x) (1-y) |

Находим средний выигрыш за партию Первого – математическое ожидание случайной величины W(x,y):

M(x,y)=2xy-3x(1-y)-2(1-x)y+2(1-x)(1-y)=2xy-3x+3xy-2y+2xy+2-2x-2y+2xy=9xy-5x-4y+2=9x(y-5/9)-4(y-5/9)+6/9=9(y-5/9)(x-4/9)+6/9

Для нахождения оптимальных стратегий игроков необходимо, чтобы M(x,y\*)≤ M(x\*,y\*)≤ M(x\*,y). Это выполняется при x\*=4/9 и y\*=5/9, так как именно в этом случае M(x , 5/9) = M(4/9 , 5/9) = M(4/9 , y) = 6/9.

Следовательно, оптимальная стратегия первого игрока есть

,



Второго - . Цена игры по определению равна v=M(P\*,Q\*)=6/9

***Задание 4***

Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции. Найти коэффициенты полных материальных затрат двумя способами (с помощью формул обращения невырожденных матриц и приближенно), заполнить схему межотраслевого баланса.

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Данные |
| 1 |  |

1. определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат по второму способу, учитывая косвенные затраты до 2-го порядка включительно. Запишем матрицу коэффициентов косвенных затрат 1-го порядка:



матрицу коэффициентов второго порядка:



Таким образом, матрица коэффициентов полных материальных затрат приближенно равна:



3. определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат с помощью формул обращения невыраженных матриц (первый способ).

А) находим матрицу (Е - А):



Б) вычисляем определитель этой матрицы:



В) транспонируем матрицу (Е - А):



Г) находим алгебраические дополнения для элемента матрицы :



Таким образом, присоединенная к матрице (Е – А) матрица имеет вид:



Д) используя формулу (7.14), находим матрицу коэффициентов полных материальных затрат:





Элементы матрицы В, рассчитанные по точным формулам обращения матриц, больше соответствующих элементов матрицы, рассчитанных по второму приближенному способу без учета косвенных материальных затрат порядка выше 2-го.

1. найдем величины валовой продукции трех отраслей (вектор Х), используя формулу (7.9)





1. для определения элементов первого квадрата материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой, вытекающей из формулы (7.4): . Из этой формулы следует, что для получения первого столбца первого квадрата нужно элементы первого столбца заданной матрицы А умножить на величину ; элементы второго столбца матрицы А умножить на ; элементы третьего столбца матрицы А умножить на .

Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся с учетом формулы (7.1) как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта.

Четвертый квадрант в нашем примере состоит из одного показателя и служит, в частности, для контроля правильности расчета: сумма элементов второго квадранта должна в стоимостном материальном балансе совпадать с суммой элементов третьего квадранта. Результаты расчета приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Производящие отрасли | Потребляющие отрасли | | | | |
| 1 | 2 | 3 | Конечная продукция | Валовая продукция |
| 1  2  3 | 476.76  397.3  158.92 | 118.04  59.02  59.02 | 0  33.76  0 | 200  100  120 | 794.6  590.2  337.6 |
| Условно чистая продукция | -238.38 | 354.12 | 303.84 | 420 |  |
| Валовая продукция | 794.6 | 590.2 | 337.6 |  | 1722.4 |

***Задание 5***

Проверить ряд на наличие выбросов методом Ирвина, сгладить методом простой скользящей средней с интервалом сглаживания 3, методом экспоненциального сглаживания (=0,1), представить результаты сглаживания графически, определите для ряда трендовую модель в виде полинома первой степени (линейную модель), дайте точечный и интервальный прогноз на три шага вперед.

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Ряд данных |
| 1 | у = 12, 10, 11, 13, 14, 15, 14, 13, 15, 16 |

Найдем среднее арифметическое 

Среднее квадратическое отклонение 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | - | 1.06 | 0.53 | 1,06 | 0.53 | 0.53 | 0.53 | 0.53 | 1.06 | 0.53 |

Аномальный уровень отсутствует.

Методом простой скользящей средней с интервалом сглаживания 3

Для вычисления сглаженных уровней ряда  применяется формула:



где  при нечетном m, в нашем случае m = 3, следовательно 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y(t) | 12 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 | 14 | 13 | 15 | 16 |
|  | - | - | 11 | 11.3 | 12.7 | 14 | 14.3 | 14 | 14 | 14.7 |

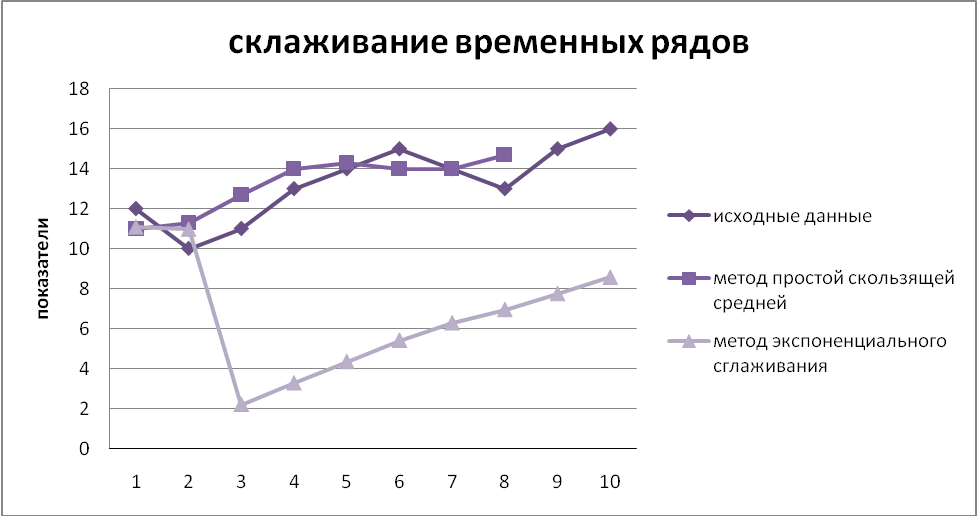
Методом экспоненциального сглаживания (=0,1)

Экспоненциальное сглаживание осуществляется по формуле:, где - параметр сглаживания. В нашем случае = 0,1.



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y(t) | 12 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 | 14 | 13 | 15 | 16 |
|  | 11.1 | 10.99 | 2.2 | 3.28 | 4.35 | 5.42 | 6.29 | 6.96 | 7.76 | 8.58 |

Графическое представление результатов сглажевания



Ниже в таблице приведены исходный ряд данных yt и сглаженные двумя способами уровни исходного ряда. При этом при сглаживании при помощи метода простой скользящей средней использовался интервал сглаживания *m* = 3.

При сглаживании экспоненциальным методом был доведён параметр сглаживания *а* = 0,1

Соответственно, числовая последовательность весов имела вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *t* | *yt* | методом  простой скользящей средней | \_ методом  *y* экспоненциального  сглаживания |
| 1 | 12 | - | 11.1 |
| 2 | 10 | 11 | 10.99 |
| 3 | 11 | 11.3 | 2.2 |
| 4 | 13 | 12.7 | 3.28 |
| 5 | 14 | 14 | 4.35 |
| 6 | 15 | 14.3 | 5.42 |
| 7 | 14 | 14 | 6.29 |
| 8 | 13 | 14 | 6.96 |
| 9 | 15 | 14.7 | 7.76 |
| 10 | 16 | - | 8.58 |

Чтобы правильно подобрать лучшую кривую роста для моделирования и прогнозирования экономического явления, необходимо знать особенности каждого вида кривых в экономике часто используется полиномиальная кривая роста, как кривая с полиномом первой степени.



Параметр a1 называют линейным приростом. Для полинома первой степени характерен постоянный закон роста. Если посчитать первые приросты по формуле

*ut = yt – yt-1, t* = 2,3,…,n,

то они будут постоянной величиной и равны *а* 1.

Значения прироста для полиномов любого порядка не зависят от значений самой функции .



Полиномные кривые роста можно использовать для аппроксимации (приближения) и прогнозирования экономических процессов, в которых последующее развитие не зависит от достигнутого уровня. Исходный временной ряд предварительно сглаживается методом простой скользящей средней.

Необходимо оценить адекватность и точность построения модели, т.е. необходимо выполнение следующих условий:

1. проверка случайности колебаний уровней остаточной последовательности:



Проверку случайности уровней ряда проведем по критерию пиков, должно выполняться:



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| t | Фактическое | Расчётное | Отклонение | Точки пиков |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10 | 12  10  11  13  14  15  14  13  15  16 | 10.99  11.51  12.03  12.55  13.07  13.59  14.11  14.63  15.15  15.67 | 1.01  -1.51  -1.03  0.45  0.93  1.41  -0.11  -1.63  -0.15  0.33 | --  1  0  0  0  1  0  1  0  - |
| 55 | 133 | 133.3 | - | 3 |

1. проверка соответствия распределения случайной компоненты нормальному закону распределения:





В соответствии с характером изменения средних приростов и производных показателей выбирается вид кривой роста для исходного временного ряда.

Необходимые условия:



Если эти условия выполняются одновременно, то гипотеза о характере распределения случайной компоненты принимается, если выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:



то гипотеза о нормальном распределении отвергается, трендовая модель признаётся неадекватной.

1) 

2) 

Таким образом, одно из неравенств не выполняется, трендовая модель неадекватна, значит, дальнейшее исследование не имеет смысла, но попробуем.

Прогнозирование экономических показателей на основе трендовых моделей основано на распространении закономерностей, связей и соотношений, действующих в изучаемом периоде, за его пределами. Достоверный прогноз возможен лишь относительно таких объектов и явлений, которые в значительной степени детерминируются прошлым и настоящим. При прогнозировании лучше задавать интервалы значений, в которых с достаточной долей уверенности можно ожидать появления прогнозируемой величины. Установление такого интервала называется интервальным прогнозом.

Прогноз на основании трендовых моделей (кривых роста) содержит два элемента: точечный и интервальный прогнозы.

Для полинома первой степени адекватная линейная модель



**=** 10.47 + 0,52t



Получим точечные прогнозы, подставляя в формулу

**=** *а0* + *а1t*



значения *t* = 11*, t*=12, *t* =13, то есть на три шага вперёд.

Среднее значение по ряду было определено ранее ,это число11

a 1 для полинома первой степени выведено и равно 0,52

11 = 11 + 0,52 \* 11 = 16.72



12 = 11+ 0,52 \* 12 = 17.24



13 = 11 + 0,52\* 13 = 17.76



Вычислим значения величины *К* путём их линейной экстраполяции приведённых имеющихся значений для числа уровней в ряду n = 11, 12, 13.

По таблице значений величина *К* для *t* = 10 (*L* = 1) *K* = 1,77

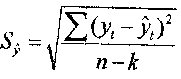
Для *t* = 11 (*L*= 1) *K* = 1,88

Для *t* = 12 (*L*= 2) *K* = 1,73

Для *t* = 13 (*L*= 3) *K* = 1,68

Определим среднюю квадратическую ошибку прогнозируемого показателя

10.41/10 –1,77=1,26 корень=1.12



Для *n* 11 *K* после расчёта по формуле = 0.15

Для *n* 12 *К* = 0.19

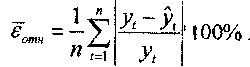
Для *n* 13 *К* = 0.23

Интервальный прогноз на базе трендовых моделей осуществляется путём расчёта доверительного интервала. В этом интервале учитывается верхняя и нижняя границы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Время *t* | Шаг *L* | Точечный прогноз | Доверительный интервал прoгноза | |
| Нижняя граница | Верхняя граница |
| 11  12  13 | 1  2  3 | 16.72  17.24  17.76 | 15.83  17.02  17.5 | 16.88  17.45  18.02 |



Ввиду того, что предыдущая трендовая модель неадекватна выясним по формуле среднюю относительную ошибку аппроксимации по формуле:



а.) для трендовой модели по методу простой скользящей средней:

(1 : 8) \* (0 + 0,13+ 0,09+ 0,07 +(-0,02) + (-0,08) + 0,07 +0,08)\* 100%= 42.5%

б) для трендовой модели по экспоненциальному способу:

( 1 : 10) \* (0,08+ (-0,099) +0,8 +0,75 +0,69 +0,64 +0,55 +0,46 +0,48 +

0,46)\* 100% = 48.11%

Можно выбрать для прогноза трендовую модель по экспоненциальному способу, как наиболее точную.

***Задание 6***

Пункт по ремонту радиотехники работает в режиме отказа с одним мастером. Интенсивность потока заявок , производительность мастера . Определить предельные значения относительной пропускной способности Q, абсолютной пропускной способности А и вероятность отказа  телефонной линии. Определить также среднее время обслуживания одного вызова, среднее время простоя канала и вероятность того, что канал свободен или занят.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вариант | Интенсивность потока заявок | Интенсивность потока обслуживания |
| 1 | 0.25 | 0.35 |

*Решение.*

Так как пункт по ремонту радиотехники является СМО с отказами, характеризующаяся параметрами: интенсивность потока заявок =0.25 и Интенсивность потока обслуживания , то по формуле определим предельную вероятность отказа:



или 41%, т.е. в установившемся режиме из каждых 100 заявок в среднем 41 получают отказ.

Определим предельное значение относительной Q и абсолютной A пропускной способности СМО:



Итак, из расчета следует, что случайный характер поступления телефонных вызовов и случайных характер длительности разговоров порождают ситуацию, что абсолютная пропускная способность А = 0,148 разговора/мин более чем в два раза меньше производительности телефонной линии  вызовов/ мин.

Определим далее:

* среднее время обслуживания  мин.
* среднее время простоя канала  мин.
* Вероятность того, что канал свободен 

или 

* Вероятность того, что канал занят 

Таким образом, вероятность того, что канал занят, меньше вероятности того, что канал свободен, и этого следовало ожидать, так как интенсивность входящего потока  меньше интенсивности производительности канала .