Содержание

Введение

§1. Определение линейного оператора. Примеры

§2. Непрерывные линейные операторы в нормированном пространстве. Ограниченность и норма линейного оператора

§3. Обратный оператор. Спектр оператора и резольвента

§4. Оператор умножения на непрерывную функцию

§5. Оператор интегрирования

§6. Оператор дифференцирования

§7. Оператор сдвига

Заключение

**Введение**

Наиболее доступными для изучения среде операторов, действующих в линейных нормированных пространствах, являются линейные операторы. Они представляют собой достаточно важный класс операторов, так как среди них можно найти операторы алгебры и анализа.

Целью дипломной работы является показать некоторые из линейных операторов, исследовать их на непрерывность и ограниченность, найти норму ограниченного оператора, а также спектр оператора и его резольвенту.

В первом и втором параграфах приведены основные сведения теории операторов: определение линейного оператора, непрерывности и ограниченности линейного оператора, его нормы. Рассмотрены некоторые примеры.

В третьем параграфе даны определения обратного оператора, спектра оператора и его резольвенты. Рассмотрены примеры.

В четвертом параграфе исследуется оператор умножения на непрерывную функцию: Ах(t) = g(t)x(t).

В пятом параграфе приведен пример оператора интегрирования Аf(t)=.

В седьмом параграфе исследуется оператор сдвига Af(x) = f(x+a).

Показана линейность, непрерывность, ограниченность, найдена норма, точки спектра и резольвента всех трех операторов.

В шестом параграфе исследуется оператор дифференцирования Дf(x)=f/(x), в пространстве дифференцируемых функции D[a, b]. Показана его линейность. Доказано, что Д не является непрерывным оператором, а также как из неограниченности оператора следует его разрывность.

**§1. Определение линейного оператора. Примеры**

**Определение 1.** Пусть Ex и Ey [[1]](#footnote-1)– линейные пространства над полем комплексных (или действительных) чисел. Отображение А: Ex → Ey называется ***линейным оператором***, если для любых элементов х1 и х2 пространства Ex и любого комплексного (действительного) числа  выполняются следующие равенства [[2]](#footnote-2):

1. А(х1+х2) = Ах1 + Ах2;
2. А(х) = А(х);

**Примеры линейных операторов:**

1) Пусть Е = Е1 – линейное топологическое пространство. Оператор А задан формулой:

Ax = x для всех x  Е.

Такой оператор, переводящий каждый элемент пространства в себя является линейным и называется единичным оператором.

2) Рассмотрим D[a,b] – пространство дифференцируемых функций, оператор дифференцирования Д в пространстве D[a,b] задан формулой:

Дf(x) = f/(x).

Где f(x)  D[a, b], f/(x)  C[a, b].

Оператор Д определен не на всем пространстве C[a, b], а лишь на множестве функций имеющих непрерывную производную. Его линейность, очевидно, следует из свойств производной.

3) Рассмотрим пространство С[-, +] – пространство непрерывных и ограниченных функций, оператор А сдвигает функцию на const a:

Аf(x) = f(x+a).

Проверим линейность оператора А:

1) А(f+g) = (f+g)(x+a) = f(x+a) + g(x+a) = А(f) + А(g).

Исходя из определения суммы функции, аксиома аддитивности выполняется.

2) A(kf(x)) = kf(x+a) = kA(f(x)).

Верна аксиома однородности.

Можно сделать вывод, что А – линейный оператор.

4) Пусть  (пространство непрерывных функций на отрезке [0,1], и дано отображение 1, заданное формулой:



Так как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции является функцией дифференцируемой, а, следовательно, непрерывной, то . В силу линейности определенного интеграла данное отображение является линейным оператором.

**§2. Непрерывные линейные операторы в нормированном**

**пространстве. Ограниченность и норма линейного оператора**

Пусть ,  – нормированные пространства.

**Определение 2 .**Оператор А: Е  Е1 называется ***непрерывным***в точке , если какова бы не была последовательность xn  x0, А(xn) сходится к А(x0). То есть, при p (xn, x0)  0, p (А(xn), А(x0))  0.

Известно и другое (равносильное) определение непрерывности линейного оператора.

**Определение 3.** Отображение А называется ***непрерывным*** в точке x0, если какова бы не была окрестность[[3]](#footnote-3) U точки y0 = А (x0) можно указать окрестность V точки x0 такую, что А(V)  U.

Иначе >0 >0, что как только p (x, x0) < , p (f(x), f(x0)) < .

**Теорема 1.**

Если линейный оператор непрерывен в точке х0 = 0, то он непрерывен и в любой другой точке этого пространства.

**Доказательство.** Линейный оператор А непрерывен в точке х0=0 тогда и только тогда, когда . Пусть оператор А непрерывен в точке х0=0. Возьмем последовательность точек пространства хn→х1, тогда хn–х1→0, отсюда А(хn–х1)→А(0)=0, т. е. А(хn–х1)→0.

Так как А – это линейный оператор, то А(хn–х1)→Ахn–Ах0, а тогда

Ахn-Ах0 → 0, или Ахn→Ах0.

Таким образом, из того, что линейный оператор А непрерывен в точке х0=0, следует непрерывность в любой другой точке пространства.

т. д-на.

**Пример.**

Пусть задано отображение F(y) = y(1) пространства С[0, 1] в R. Проверим, является ли это отображение непрерывным.

Решение.

Пусть y(x) – произвольный элемент пространства С[0, 1] и yn(x) – произвольная сходящаяся к нему последовательность. Это означает:

 p (yn, y) = |yn(x)- y(x))| = 0.

Рассмотрим последовательность образов: F(yn) = yn(1).

Расстояние в R определено следующим образом:

p (F(yn), F(y)) = |F(yn) - F(y))| = | yn(1) - y(1)|  |yn(x)- y(x))|=p(yn,y),

то есть p (F(yn), F(y))  0.

Таким образом, F непрерывно в любой точке пространства С[a, b], то есть непрерывно на всем пространстве.

С понятием непрерывности линейного оператора тесно связано понятие ограниченности.

**Определение 4.** Линейный оператор А: Е  Е1 называется ***ограниченным***, если можно указать число K>0 такое, что

||Аx||  K||x||. (1)

**Теорема 2.**

Среди всех констант K, удовлетворяющих (1), имеется наименьшее.

**Доказательство:**

Пусть множество S – множество всех констант K, удовлетворяющих (1), будучи ограниченным снизу (числом 0), имеет нижнюю грань k. Достаточно показать, что k  S.

По свойству нижней грани в S можно указать последовательность (kn), сходящуюся к k. Так как kn  S, то выполняется неравенство: |А(x)|  kn||x||, (xE). Переходя в этом неравенстве к пределу



получаем |А(x)|  k||x||, где (xE), (k  S).

т. д-на.

**Определение 5.** Наименьшая из этих констант K, для которых выполняется неравенство (1), называется ***нормой*** оператора А и обозначается ||A||[[4]](#footnote-4).

||А||  K, для K, подходящего для (1), то есть |А(x)|  ||А||||x||, где

||А|| =  xE.

Между ограниченностью и непрерывностью линейного оператора существует тесная связь, а именно справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.**

Для того, чтобы линейный оператор А действующий из Ex в Ey был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы оператор А был непрерывен.

Необходимость:

Дано: А – ограничен;

Доказать: А – непрерывен;

**Доказательство:**

Используя теорему 1 достаточно доказать непрерывность А в нуле.

Дано, что ||Аx||  K||x||.

Докажем, что А непрерывен в нуле, для этого должно выполняться >0, >0 что ||x||<   ||Ax|| < .

Выберем  так, чтобы K\*||x|| < , ||x|| < , (К>0), значит  = , тогда если ||x||< , то ||Аx||  K||x|| < K = 

Непрерывность в нуле доказана, следовательно доказана непрерывность в  точке.

Достаточность:

Дано: А – непрерывен;

Доказать А – ограничен;

**Доказательство:**

Допустим, что А не ограничен. Это значит, что числу 1 найдется хотя бы один соответственный вектор x1 такой, что ||A x1|| > 1|| x1||.

Числу 2 найдется вектор x2, что ||A x2|| > 2|| x2|| и т.д.

Числу n найдется вектор xn, что ||A xn|| > n|| xn||.

Теперь рассмотрим последовательность векторов yn = , где

||yn|| = .

Следовательно последовательность yn  0 при n  .

Так как оператор А непрерывен в нуле, то Аyn  0, однако

||Аyn || = ||A|| = ||Axn || > n|| xn|| = 1, получаем противоречие с Аyn  0, то есть А – ограничен

Для линейных операторов ограниченность и непрерывность оператора эквивалентны.

**Примеры.**

1) Покажем, что норма функционала[[5]](#footnote-5) F(y) =  в C[a, b], где p(x) – непрерывная на [a,b] функция, равна .

По определению 5: ||F|| = |F(x)| = ||.

||  || = |y(x)|||  |y(x)|||;

||F|| = (|y(x)|||) = ||y(x)|||| = ||  .

Таким образом, норма F(y) =  будет ||F|| = ;

2) Найдем норму функционала, определенного на C[0, 2], где p(x)=(x-1)

F(y) = .

По выше доказанному ||F|| =  = 1.

**§3. Обратный оператор. Спектр оператора и резольвента**

Пусть ,  – нормированные пространства,  – линейный оператор, DA- область определения оператора**,** а RA – область значений.

**Определение 6.** Оператор А называется ***обратимым***, если для любого элемента у, принадлежащего RA, уравнение Ах=у имеет единственное решение.

Если оператор А обратим, то каждому элементу у, принадлежащему RA, можно поставить в соответствие единственный элемент х, принадлежащий DA и являющийся решением уравнения Ах=у. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется ***обратным оператором*** к оператору А и обозначается А-1.

**Теорема 4.**

Для того чтобы линейный оператор  имел ограниченный обратный оператор необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

, (m>0).

**Доказательство:**

Достаточность.

Пусть выполняется данное неравенство. Тогда равенство Ax=0 возможно лишь тогда, когда x – нулевой вектор. Получим 0  m\*||x||, отсюда ||x||  0, но так как норма не может быть <0, то x=0. А обращается в ноль лишь на нулевом векторе. Итак, А-1 существует.

Докажем его ограниченность.

y=Ax.

x=A-1y, норма ||A-1y||=||x||, но ||x||  ||Ax||=||y||.

Отсюда ||A-1y||  ||y||, то есть обратный оператор существует и он ограничен.

Если за m возьмем наибольшую из возможных, то получим, что ||A-1||=.

Необходимость.

Пусть от А имеется ограниченный обратный А-1 на нормированном пространстве.

Итак, ||A-1y||  М||y||.

Подставляем значение y и значение A-1y,получим ||x||  M||Ax|| (М всегда можно считать положительным числом).

Отсюда ||Ax||  ||x||.

Положим =m, получим ||Ax||  m||x||.

т. д-на.

В теории операторов важную роль играет понятие спектра оператора. Рассмотрим это понятие сначала для конечномерного пространства.

**Определение 7.** Пусть А – линейный оператор в n-мерном пространстве Еn. Число λ называется *собственным значением* оператора А, если уравнение Ах=λх имеет ненулевые решения. Совокупность всех собственных значений называется ***спектром***оператора А, а все остальные значения λ – *регулярными.* Иначе говоря, λ есть регулярная точка, если оператор , где I – единичный оператор, обратим, При этом оператор (А – λI)-1, как и всякий оператор в конечномерном пространстве, ограничен. Итак, в конечномерном пространстве существуют две возможности:

1. уравнение Ах=λх имеет ненулевое решение, то есть λ является собственным значением для оператора А; оператор (А – λI)-1 при этом не существует;
2. существует ограниченный оператор (А – λI)-1, то есть λ есть регулярная точка.

В бесконечном пространстве имеется еще и третья возможность, а именно:

1. оператор (А – λI)-1 существует, то есть уравнение Ах=λх имеет лишь нулевое решение, но этот оператор не ограничен.

Введем следующую терминологию. Число λ мы назовем *регулярным* для оператора А, действующего в линейном нормированном пространстве Е, если оператор (А – λI)-1, называемый *резольвентой* оператора А, *определен на всем пространстве Е и непрерывен.* Совокупность всех остальных значений λ называется *спектром* оператора А. Спектру принадлежат все собственные значения оператора А, так как, если (А – λI)х=0 при некотором х≠0, то оператор (А – λI)-1 не существует. Их совокупность называется *точечным спектром*. Остальная часть спектра, то есть совокупность тех λ, для которых (А – λI)-1 существует, но не непрерывен, называется *непрерывным спектром.* Итак, каждое значение λ является для оператора А или регулярным, или собственным значением, или точкой непрерывного спектра. Возможность наличия у оператора непрерывного спектра – существенное отличие теории операторов в бесконечномерном пространстве от конечномерного случая*.*

**Определение 8.** Оператор , где  – регулярная точка оператора А, называется ***резольвентой[[6]](#footnote-6)*** оператора А и обозначается  (или ).

**Теорема 5.** Пусть  – линейный непрерывный оператор,  его регулярные числа. Тогда .

**Доказательство.** Умножим обе части равенства на : (==. С другой стороны получим . Так как числа  – регулярные для оператора А, то оператор  имеет обратный. Значит, из равенства  следует, что . Значит, утверждение теоремы верно.

т. д-на.

**Примеры.**

1) Рассмотрим в пространстве C[0,1] оператор умножения на независимую переменную t: Ax = tx(t).

Уравнение Аx=x принимает в этом случае вид:

tx(t) - x(t) = y(t),

решение x(t) этого уравнения есть функция, тождественно ему удовлетворяющая.

Если  лежит вне отрезка [0, 1], то уравнение Аx=x имеет при любом y(t) единственное непрерывное решение:

x(t) = y(t),

откуда следует, что все такие значения параметра  являются регулярными, и резольвента есть оператор умножения на :

R(y) = y(t).

Все значения параметра, принадлежащие отрезку[0, 1], являются точками спектра. В самом деле, пусть 0  [0, 1]. Возьмем в качестве y(t) какую-нибудь функцию, не обращающуюся в нуль в точке 0, y(0) = a  0. Для такой функции равенство (t - 0)x(t) = y(t), не может тождественно удовлетворяться ни при какой непрерывной на отрезке [0, 1] функции x(t), ибо в точке t = 0 левая часть его равна нулю, в то время как правая отлична от нуля. Следовательно, при  = 0 уравнение Аx=x не имеет решения для произвольной правой части, что и доказывает принадлежность 0 спектру оператора A. Вместе с тем ни одна точка спектра не является собственным значением, так как решение однородного уравнения (t - )x(t) = 0,   [0, 1], при любом t, отличном от , а следовательно, в силу непрерывности и при t = , обращается в нуль, т.е. тождественно равно нулю.

2) Пусть оператор А действующий из Е  Е, задается матрицей А=.

Аx =  = .

Введем обозначения:

 = y1

 = y2

x1, x2, y1, y2  E;

A - \*I = , найдем определитель A - \*I:

D(A - \*I) =  = (2-)\*(-2-) – 3 = 2 – 7;

Если определитель отличен от нуля, то есть если  не есть корень уравнения 2 – 7 = 0, следовательно, все такие значения параметра  регулярные.

Корни уравнения 2 – 7 = 0 образуют спектр:

1 = ; 2 = -;

1, 2 – собственные значения.

Найдем собственные векторы для собственных значений :

при  =  получаем:



откуда x1 = (2+)x2; 1-й собственный вектор: ((2+)x, x);

при  = - получаем:



откуда x1 = (2 - )x2 ; 2-й собственный вектор: ((2 - )x, x);

**§4. Оператор умножения на непрерывную функцию**

Рассмотрим пространство  непрерывных на отрезке  функций, и оператор А, заданный формулой:

Ах(t) = g(t) x(t).

g(t) - функция, непрерывная на [a, b]; a,bR.

Проверим является ли оператора А линейным, то есть, по определению 1, должны выполняться аксиомы аддитивности и однородности.

1) Аксиома аддитивности: A(f+g) = A(f) + A(g).

A(f+g) = (g(t)+f(t))x(t) = g(t)x(t)+f(t)x(t) = A(f) + A(g).

2) Аксиома однородности: A(k\*f) = k\*A(f).

A(k\*f) = A(k\*x(t)) = k\*g(t)x(t) = kA(x(t)) = k\*A(f).

По средствам арифметических операции над функциями, аксиомы аддитивность и однородность выполняются. Оператор А является линейным по определению.

3) Проверим, является ли А непрерывным, для этого воспользуемся определением непрерывности:

p (fn(x), f0(x))  0  p (A fn(x), Af0(x)) 0.

Оператор А, действует в пространстве C[], в котором расстояние между функциями определяется следующим образом:

p (fn(x), f0(x)) = | fn(x) - f0(x)|.

Решение:

p (A xn(t), Ax0(t)) = |Axn(t) - Ax0(t)| = |xn(t)g(t) - x0(t)g(t)|  |g(t)| |xn(t) - x0(t)| = |g(t)|p (xn(t), x0(t))  0.

Итак, p (A xn(t), Ax0(t))  0. Следовательно по определению 2 оператор А является непрерывным, а по теореме 3 он ограничен.

4) Оператор А ограниченный, следовательно у него можно найти норму.

По определению 5: ||A||=|A(f)|.

Решение.

||A||=|A(f)|=|g(t)x(t)|.

|g(t)x(t)|  |g(t) x(t)| = |g(t)| |x(t)|  |x(t)| |g(t)|.

||A||= |x(t)| |g(t)| =  ||x(t)|| |g(t)|  |g(t)|.

Норма оператора А: ||A|| = |g(t)|.

5) Обратимость оператора А, его спектр и резольвента.

Возьмем произвольное число  и составим оператор :

(*А-λI*) *x*(t) = (g(t) –λ ) х(t).

Чтобы найти обратный оператор, нужно решить уравнение  относительно функции . Это возможно, если  для любого :

.

Если число  не является значение функции g(t), то знаменатель не обращается в 0, и функция  непрерывна на данном отрезке, а, значит, ограничена: существует такое число С, что на всем отрезке . Отсюда следует, что оператор  является ограниченным.

Если же , то оператор  не существует. Следовательно, спектр оператора состоит из всех λ = g(t).

Резольвента оператора имеет вид .

Отметим, что точки спектра , , не являются собственными числами. Не существует такой непрерывной функции , для которой , или . Поэтому весь спектр данного оператора является непрерывным.

Вывод:

Оператор A, заданный формулой: Ах(t) = g(t)x(t), где g(t) - функция, непрерывная на [a, b], a,bR:

1. линейный;
2. непрерывный;
3. ограниченный, с нормой ||A|| = |g(t)|;
4. обратим при , для любого ;
5. спектр оператора состоит из всех λ = g(t); спектр данного оператора является непрерывным;
6. резольвента имеет вид .

**§5.** **Оператор интегрирования**

Рассмотрим оператор интегрирования, действующий в пространстве непрерывных функций - C[a,b], определенных на отрезке [a,b], заданный следующим образом:

Аf(t) = .

f(t) – функция, непрерывная на [a, b],t  [a,x]; x  [a,b]; a,bR;

Поскольку  - интеграл с переменным верхним пределом, есть функция от верхнего предела – F(x), a  x  b; Следовательно можно утверждать, что А – оператор.

Проверим оператор A на линейность. По определению 1:

1) Аксиома аддитивности: A(f+g) = A(f) + A(g).

A(f+g) =  =  +  = A(f) + A(g).

2) Аксиома однородности: A(kf) = kA(f).

A(kf) =  = k\* = kA(f).

Исходя из свойств интеграла:

1. интеграл от суммы, есть сумма интегралов;
2. вынесение const за знак интеграла.

Можно сделать вывод: оператор А является линейным.

3) Проверим, является ли А непрерывным, для этого воспользуемся определением непрерывности:

p (fn(t), f0(t))  0  p (A fn(t), Af0(t)) 0.

Оператор А, действует в пространстве C[a,b], в котором расстояние между функциями определяется следующим образом:

p (fn(t), f0(t)) = | fn(t) - f0(t)|.

Решение:

p (A fn(t), Af0(t)) = | - |.

| - | = ||     = p (fn(t), f0(t))  = p (fn(t), f0(t)) (x-a)  0

axb.

Таким образом p (A fn(t), Af0(t))  0. следовательно по определению 2 оператор А непрерывен.

4) Непрерывный оператор является ограниченным (теорема 3):

||  ||  ||

|| = 0; || = |b-a|.

0  ||  |b-a|.

5) Оператор А ограниченный, следовательно у него можно найти норму. Найдем норму оператора А (используя определение ||A||=|A(f)|):

||A|| = |A(f)| =  ||     = (x-a);

a  x  b;

Норма оператора А: ||A|| = (b-a);

6) Обратимость интегрального оператора и его спектр.

Возьмем пространство S = {f  C[0,b] / f(0) = 0} с нормой ||f|| = |f(x)|.

В пространстве S рассмотрим оператор А:

Аf = 

x  [0,b], t  [0,x];

Найдем оператор обратный к (A - \*I),   R;

(A - \*I)\*f = g

 - \*f(x) = g(x) (1)

Пусть функции f и g дифференцируемы;

Продифференцируем уравнение (1), получим:

f - \*f/ = g/ (2)

Это уравнение (2) – дифференциальное неоднородное линейное уравнение. Решим это уравнение, используя метод Бернулли.

 - f/ = 

 -  + f/ = 0 (3)

Представим решение уравнения в виде: f(x) = U(x)\*V(x), тогда уравнение (3) примет вид:

 - \*U\*V + U/ \*V + U\*V/  = 0

U/ \*V + U\*V/ - \*U\*V = - 

U/ \*V + U\*(V/ - \*V) = -  (4)

Решаем однородное линейное уравнение:

V/ - \*V = 0

V/ = \*V

 = \*V

 = 

LnV =  + c

V = \*, пусть  = с1

V = с1\*

Подставим частное решение однородного уравнения в уравнение (4) при условии, что V/ - \*V = 0.

Получим уравнение:

U/ \* с1\* = - 

 = -

 = - \*

U = -\*

Подставим U и V в f(x) = U(x)\*V(x) и получим:

f(x) = с1\*\*(-)\*

найдем интеграл Y = , интегрируем по частям:

dz = g/(x)dx;

z =  = g(x);

j = ;

dj = - \*dx;

Y = g(x)\*  + \*

Подставим полученное значение в выражение f(x), которое примет вид:

f(x) = - - \*\*;

Получим оператор В:

Bg = - - \*\*;

x  [0,b], t  [0,x], g(x)  S,  - произвольное число.

Оператор В не существует, если  = 0;

Рассмотрим ограниченность оператора В для всех   R,   0;

||Bg|| = ||f(x)|| = |f(x)| = |- - \*\*|  (|| + |\*\*|)  || + |\*\*|  || + |\*|\*|g(x)\* |\*|x|  \*|g(x)| + \*|g(x)|\* (||\*|x|)  |g(x)|\*(  + \*\*\*b);

При  > 0

 = ;

 = 1;

При  < 0

 =1;

 = ;

Эти оба случая можно записать в общем виде: {1, }, тогда

|g(x)|\*(  + \*\*\*b)  |g(x)|\*(  + \*{1, }\*b) = ||g(x)||\*(  + \*{1, }\*b);

Итак:

||Bg||  ||g(x)||\*(  + \*{1, }\*b);

То есть В – ограничен.

Осталось проверить, что В – оператор, обратный к (A - \*I).

Если это так, то произведение этих операторов равно единичному оператору или же (A - \*I)\*(Bg) = g(x).

Итак, нужно доказать, что

 + g(x) + \* = g(x)

или

-\* -  + \*\* = 0; (\*)

Возьмем производную от левой части (\*) и получим:

-\*g(x) - \*\* + \*\* + \*\*\* g(x) = -\*g(x) + \*g(x) - \*\* + \*\* = 0;

Следовательно, выражение (\*) = const. Но, так как при x=0 выражение (\*) (точнее его левая часть) равно 0, то и const=0. Значит В – обратный оператор к (A - \*I) в S.

Итак, мы получили ограниченный оператор В, обратный к (A - \*I), который существует при    R, за исключением =0, то есть все возможные 0 – это регулярные точки оператора А; Сам же оператор В – резольвента оператора А. Спектр оператора А – значение  при которых В не существует, то есть =0.

Вывод:

Оператор интегрирования, действующий в пространстве непрерывных функций – C[a,b], определенных на отрезке [a,b], заданный следующим образом: Аf(t) = , где f(t) – функция, непрерывная на [a, b], t  [a,x]; x  [a,b]; a,bR:

1. линейный;
2. непрерывный;
3. ограниченный: 0  ||  |b-a|;
4. норма A: ||A|| = (b-a);
5. резольвента оператора А: R(A) = - - \*\*, где

x  [0,b], t  [0,x], g(x)  S, S = {f  C[0,b] / f(0) = 0} с нормой ||f||=|f(x)|, g(x) =  - \*f(x), - произвольное число.

1. Спектр оператора А: =0.

**§6.** **Оператор дифференцирования.**

Рассмотрим оператор дифференцирования Д действующий в пространстве дифференцируемых функций – D[a,b], заданный следующим образом:

Дf(x) = f/(x);

Функция f(x)  D[a, b], f/(x)  C[a, b];

Проверим оператор Д на линейность, по определению 1:

1) Аксиома аддитивности: Д(f+g) = Д(f) + Д(g).

Д(f+g) = (f+g)/ = f/ + g/ = Д(f) + Д(g).

2) Аксиома однородности: Д(kf) = kД(f).

Д(kf) = (kf) / = k(f)/ = kД(f).

Исходя из свойств производной:

1. производная от алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме их производных;
2. постоянный множитель можно вынести за знак производной.

Можно утверждать, что Д – линейный оператор.

3) Для линейных операторов ограниченность и непрерывность оператора эквивалентны, это следует из теоремы 3.

3.1) Для начала покажем, что Д не является непрерывным оператором.

Задан оператор Дf(x) = f/(x) подпространства E  C[0, 2], состоящего из непрерывно дифференцируемых функций, в пространство C[0, 2].

Рассмотрим f0(x) = 0  C[0, 2] и последовательность функций fn(x)=.

В пространстве E  C[0, 2]: p (f0, fn) = || =   0, следовательно fn   f0.

Рассмотрим последовательность образов: Д(fn ) = cos(nx).

Имеем:

p (Дfn, Дf0) = |cos(nx)|   = 1.

Это означает, что Дfn не может сходиться к Дf0 , то есть отображение Д терпит разрыв в f0.

Поскольку оператор не является непрерывным, то, следовательно, он и не является ограниченным.

3.2) Теперь покажем, как из неограниченности оператора следует его разрывность.

Пусть оператор Д действует из C[0, 1] в C[0, 1], оператор Дf(x) = f/(x);

Этот оператор определен не на всем пространстве непрерывных функций, а лишь на подпространстве непрерывных функций, имеющих непрерывную производную.

В пространстве C[0, 1] норма ||f|| = |f(t)|.

Возьмем из C[0, 1] последовательность fn(t) = tn. Она ограничена в C[0, 1]: ||fn(t)|| = |tn| = 1.

Рассмотрим Д fn(t): Д fn(t) = f/n(t) = n tn-1;

||f/n(t)|| = |n tn-1| = n.

В результате получили, что оператор Д переводит ограниченное множество в неограниченное, значит, по определению этот оператор не является ограниченным, а по теореме 3 не является непрерывным.

Вывод:

Оператор дифференцирования Д действующий в пространстве дифференцируемых функций – D[a,b], заданный следующим образом: Дf(x)=f/(x), где функция f(x)  D[a, b], f/(x)  C[a, b]:

1. линейный;
2. не ограниченный;
3. не непрерывный.

**§7.** **Оператор сдвига**

Рассмотрим оператор А, действующий в пространстве непрерывных и ограниченных функций – C[], заданный следующим образом:

Af(x) = f(x+a).

Функции f(x), f(x+a)  C[], a  R, f(x+a) – непрерывная и ограниченная функция.

Покажем линейность оператора А, по определению 1 должны выполняться следующие аксиомы :

1) Аксиома аддитивности: А(f+g) = А(f) + А(g).

А(f+g) = (f+g)(x+a) = f(x+a) + g(x+a) = А(f) + А(g).

По определению суммы функции, аксиома верна.

2) Аксиома однородности: А(kf) = kА(f).

A(k\*f(x)) = k\*f(x+a) = k\*A(f(x)).

Аксиомы 1 и 2 верны, следовательно можно сделать вывод, что А – линейный оператор.

3) Проверим является ли оператор A непрерывным, для этого воспользуемся определением непрерывности:

p (fn(x), f0(x))  0  p (A fn(x), Af0(x)) 0.

Оператор А действует в пространстве C[], в котором расстояние между функциями определяется следующим образом:

p (fn(x), f0(x)) = | fn(x) - f0(x)|.

Решение:

p (A fn(x), Af0(x)) = |Afn(x) - Af0(x)| = |fn(x+a) - f0(x+a)| =  = |fn(t) - f0(t)| = p (fn(t), f0(t))  0.

Таким образом p (A fn(x), Af0(x))  0. Следовательно оператор А непрерывен.

4) Непрерывный оператор является ограниченным, а у ограниченного оператора есть норма, найдем норму оператора А (по определению 5):

||A|| = |Af| = |f(x+a)|  1.

Поскольку ||f|| = |f(x)|  1.

Норма А: ||A|| = 1.

5) Обратимость оператора А: Af(x) = f(x+a)

Такой оператор A сдвигает функцию на const a; обратный к A оператор будет сдвигать функцию на const (-a):

A-1f(x) = f(x-a).

6) Спектр оператора А.

Рассмотрим пространство непрерывных функций – С[0, +), имеющих конечный предел на :

Af(x) = f(x+a), a0.

Вопрос о спектре оператора А касается разрешимости в пространствах С[0,b) и С[а,+).

Введем функцию V(x) =  при ||<1, 0, найдем ее предел:

 = 0

Следовательно рассмотренная функция входит в пространство С[0,+).

Теперь рассмотрим V(x+a) =  = \* = \*V(x).

Для =0 подберем непрерывную функцию = 0 при x  а и не равную 0 при x  [0, a]. Для этой функции A(V(x)) = 0 то есть она является собственным вектором для числа 0; функция V(x) = с, так же удовлетворяет разностному отношению  V(x) - V(x+a) = 0. Значит =1  точечному спектру и в том и в другом пространстве. И все точки внутри единичного круга  точечному спектру.

Покажем, что остальные точки окружности  точечному спектру оператора А в пространстве С[0, +).

Рассмотрим U(x) =  и число  =  (|| = 1);

U(x+a) =  =   = U(x);

U(x) =  = Cos() + iSin(), принадлежит пространству С[0,b) так как мнимая и действительная части – функции ограниченные, но не принадлежат пространству С[a, +) так как не имеют конечного предела на .

Если точки лежат вне единичного круга, то они регулярные для оператора А в 2-х пространствах.

Покажем, что в пространстве С[0, +) точки  = ,   2n не будут собственными числами.

Докажем это от противного: пусть найдется  = ,   2n – собственное число, тогда найдется функция f(x)  С[0, +), что

f(x+a) = f(x).

Применим оператор А n раз: f(x+n\*a) = nf(x), тогда

 f(x+na) = nf(x), у левой части предел конечен;

правая часть предела не имеет, так как не имеет предела последовательность n =  = Cos(n) + iSin(n).

Следовательно  = ,   2n собственным числом не является.

Эти точки будут принадлежать спектру оператора А в пространстве С[0,+), так как спектр замкнутое множество и граница единичного круга должна принадлежать спектру оператора А в пространстве С[0, +).

Сделаем вывод:

При ||>1 все точки регулярные;

При ||<1 и =1 – точки спектра;

При  = ,   2n – точки непрерывного спектра.

Вывод:

Оператор А, действующий в пространстве непрерывных и ограниченных функций – C[], заданный следующим образом: Af(x) = f(x+a), где функции f(x), f(x+a)  C[], a  R, f(x+a) – непрерывная и ограниченная функция:

1. линейный;
2. непрерывный и ограниченный;
3. норма А: ||A|| = 1;
4. A-1f(x) = f(x-a);
5. Спектр оператора А:

* при ||<1 и =1 – точки спектра;
* при  = ,   2n – точки непрерывного спектра;
* При ||>1 все точки регулярные.

**Заключение**

В ходе проделанной работы были рассмотрены основные определения теории линейных операторов: непрерывность, ограниченность, норма, спектр оператора и резольвента. Проведено исследование четыре оператора: оператор умножения на непрерывную функцию, оператор интегрирования, оператор дифференцирования, оператор сдвига. Можно сказать, что поставленные цели были достигнуты.

**Список литературы**

* + - 1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст]/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука; Главная редакция физико–математической литературы, 1972.
      2. Соболев, В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа [Текст] / В.И. Соболев. - М.: Наука, 1968.
      3. Петров, В.А., Виленкин, Н.Я, Граев, М.И. Элементы функционального анализа в задачах [Текст]/ В.А. Петров, Н.Я. Виленкин, М.И. Граев под ред. О.А. Павлович. - М.: Просвещение, 1978.
      4. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория [Текст]/ Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц; под ред. А.Г. Костюченко; пер. с англ. Л.И. Головина, Б.С. Литягина. – М.: Издательство иностранной литературы, 1926.

1. Ex и Ey  - линейные многообразия, то есть если x, y  Ex , то x + y  Ey , при  , .

   Ex – область определения А;

   Ey  - область значения А; [↑](#footnote-ref-1)
2. Равенства 1 и 2 определяются как аксиомы аддитивности и однородности; [↑](#footnote-ref-2)
3. *Шаром в метрическом пространстве называется совокупность элементов x пространства, удовлетворяющих условию p (xn, x0) < а.*

   *Шар D(x0, a).*

   *Если p (xn, x0)  а, то D(x0, a) – замкнутый шар.*

   *Если p (xn, x0) = а, то S(x0, a) – сфера.*

   *Всякий шар метрического пространства, содержащий точку y, называется окрестностью точки y.*

   [↑](#footnote-ref-3)
4. Свойства нормы оператора.

   1) Если оператор  ограничен, , то и оператор  ограничен, причем .

   2) Если операторы  ограничены, то и оператор  ограничен, причем  и .

   [↑](#footnote-ref-4)
5. Линейный функционал, есть частный случай линейного оператора. Именно, линейный функционал есть линейный оператор, переводящий пространство E в числовую прямую. [↑](#footnote-ref-5)
6. Резольвента – это функция комплексного переменного со значениями во множестве операторов, определенная на множестве регулярных чисел данного оператора. [↑](#footnote-ref-6)