Общий исторический обзор

Первые геометрические понятия возникли в доисторические времена. Разные формы материальных тел наблюдал человек в природе: формы растений и животных, гор и извилин рек, круга и серпа Луны и т. п. Однако человек не только пассивно наблюдал природу, но практически осваивал и использовал ее богатства. В процессе практической деятельности он накапливал геометрические сведения. Материальные потребности побуждали людей изготовлять орудия труда, обтесывать камни и строить жилища, лепить глиняную посуду и натягивать тетиву на лук. Конечно, десятки и сотни тысяч раз натягивали люди свои луки изготовляли разные предметы с прямыми ребрами и т. п., пока постепенно дошли до отвлеченного понятия *прямой линии*. Примерно то же можно сказать о других основных геометрических понятиях. Практическая деятельность человека служила основой длительного процесса выработки отвлеченных понятий, открытия простейших геометрических зависимостей и соотношений.

Начало геометрии было положено в древности при решении чисто практических задач. Со временем, когда накопилось большое количество геометрических фактов, у людей появилось потребность обобщения, уяснения зависимости одних элементов от других, установления логических связей и доказательств. Постепенно создавалась геометрическая наука. Примерно в VI - V вв. до н. э. в Древней Греции в геометрии начался новый этап развития, что объясняется высоким уровнем, которого достигла общественно-политическая и культурная жизнь в греческих государствах. Произведения, содержащие систематическое изложение геометрии, появились в Греции еще в V до н.э., но они были вытеснены “Началами” Евклида.

Геометрические знания примерно в объеме современного курса средней школы были изложены еще 2200 лет назад в “Началах” Евклида. Конечно, изложенная в “Началах” наука геометрия не могла быть создана одним ученым. Известно, что Евклид в своей работе опирался на труды десятков предшественников, среди которых были Фалес и Пифагор, Демокрит и Гиппократ, Архит, Теэтет, Евдокс и др. Ценой больших усилий, исходя из отдельных геометрических сведений, накопленных тысячелетиями в практической деятельности людей, эти великие ученые сумели на протяжении 3 - 4 столетий привести геометрическую науку к высокой ступени совершенства. Историческая заслуга Евклида состоит в том, что он, создавая свои “Начала”, объединил результаты своих предшественников, упорядочил и привел в одну систему основные геометрические знания того времени. На протяжении двух тысячелетий геометрия изучалась в том объеме, порядке и стиле, как она была изложена в “Началах” Евклида. Многие учебники элементарной геометрии во всем мире представляли (а многие и поныне представляют) собой лишь переработку книги Евклида. “Начала” на протяжении веков были настольной книгой величайших ученых.

В XVII в. Декарт благодаря методу координат сделал возможным изучение свойств геометрических фигур с помощью алгебры. С этого времени начала развиваться *аналитическая геометрия*. В XVII - XVIII вв. зарождается и разрабатывается *дифференциальная геометрия*, изучающая свойства фигур с помощью методов математического анализа. В XVIII- XIX вв. развитие военного дела и архитектуры привело к разработке методов точного изображения пространственных фигур на плоском чертеже, в связи с чем появляются *начертательная геометрия*, научные основы которой заложил французский математик Г. Монж, и *проективная геометрия*, основы которой были созданы в трудах французских математиков Д. Дезарга и Б. Паскаля (XVII в.). В ее создании важнейшую роль сыграл другой французский математик - Ж. В. Понселе (XIX в.).

Коренной перелом в геометрии впервые произвел в первой половине ХIХ в. великий русский математик Николай Иванович Лобачевский, который создал новую, *неевклидову геометрию*, называемую ныне геометрией Лобачевского.

Открытие Лобачевского было началом нового периода в развитии геометрии. За ним последовали новые открытия немецкого математика Б. Римана и др.

В настоящее время геометрия тесно переплетается со многими другими разделами математики. Одним из источников развития и образования новых понятий в геометрии, как и в других областях математики, являются современные задачи естествознания, физики и техники.

**Первоначальное понятие о многогранниках.**

**Многогранники и их элементы.**

*Проблемы нам создают не те вещи,*

*которых мы не знаем, а те, о которых мы*

*ошибочно полагаем, что знаем.*

*В. Роджерс*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Определение.** ***Многогранником*** называется тело, поверхность которого является объединением конечного числа многоугольников.  В соответствии с общим определением выпуклого множества, многогранник является ***выпуклым[[1]](#footnote-1)***, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит соединяющий их отрезок. На рисунке показаны выпуклый и, соответственно, невыпуклый многогранники. | | | |  |
| Многоугольник, принадлежащий поверхности многогранника, называется его ***гранью***, если он не содержится ни в каком другом многоугольнике, также принадлежащем поверхности многогранника.  Стороны граней называются ***рёбрами*** многогранника, а вершины – ***вершинами*** многогранника.  Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются ***диагоналями*** этого многогранника. | | | |  |
| **Определение**. Многогранник называется ***правильным***, если все его грани – равные правильные многоугольники и из каждой его вершины выходит одинаковое число рёбер. | | | |  |
|  | **Грани** | **Вершины** | Рёбра |
| **Тетраэдр** | 4 | 4 | 6 |
| **Куб** | 6 | 8 | 12 |
| **Октаэдр** | 8 | 6 | 12 |
| **Додекаэдр** | 12 | 20 | 30 |
| **Икосаэдр** | 20 | 12 | 30 |
| **Призма n-угольная** | 2n | 3n | n+2 |
| **Пирамида n-угольная** | n+1 | 2n | n+1 |
| **Теорема Эйлера.** | | | | Для числа граней Г, числа вершин В и числа рёбер Р любого выпуклого многогранника справедливо соотношение:  Г+В – Р=2 |
| ***Принцип Кавальери:*** | | | | Если два тела могут быть расположены так, что любая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая оба тела, даёт в сечении с ними равновеликие фигуры, то объёмы таких тел равны. |

**Призма.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Определение.** ***Призма*** – многогранник, составленный из двух равных многоугольников *A1A2…An и B1B2…Bn*, расположенных в параллельных плоскостях, и *n* параллелограммов. |  |
| Два равных многоугольника, лежащие в параллельных плоскостях, называются ***основаниями*** призмы (*A1A2…An и B1B2…Bn).* |
| Остальные грани призмы, являющиеся параллелограммами, называются её ***боковыми гранями*** (AnA1B1Bn) |
| Рёбра, не лежащие в основании призмы, называются ***боковыми рёбрами*** (A1B1; A2B2 … AnBn) |
| Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется ***высотой*** призмы (h). |
| ***Диагональная плоскость*** – плоскость, проходящая через диагональ основания и боковое ребро призмы. |  |
| ***Диагональное сечение*** – фигура, полученная при пересечении диагональной плоскости с поверхностью призмы. |  |
| ***Перпендикулярное сечение*** – сечение призмы плоскостью, перпендикулярной её боковым рёбрам. |  |
| В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, если в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте призмы. | |
| Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то есть если основания служат нормальными сечениями боковой поверхности, то призма называется ***прямой***, в противном случае – ***наклонной***. Высота прямой призмы равна её боковому ребру. Плоские углы основания являются плоскими углами двугранных углов между боковыми гранями. |  |
| Прямая призма называется ***правильной***, если её основания – правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани – равные многоугольники.  В правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда её высота равна диметру окружности, вписанной в основание. |  |
| ***Площадь боковой поверхности призмы*** – это сумма площадей всех её боковых граней. | *Sбок=Рп\**/*g*/*, где Рп – периметр перпендикулярного сечения,* /*g*/ - длина бокового ребра |
| ***Площадь полной поверхности призмы*** – сумма площадей всех её граней | *Sполн=Sбок+2Sосн* |
| **Объём призмы. *Объёмом*** геометрического тела называется величина части пространства, занимаемого этим телом.  Доп. справка: *в геометрии принято:*   * За единицу объёма принимают объём куба с ребром единичной длины. * Равные тела имеют равные объёмы * Объём объединения нескольких неперекрывающихся (т.е. не имеющих общих внутренних точек) тел равен сумме их объёмов * Если одно тело содержит другое, то объём первого тела не меньше объёма второго | *V=Sосн\*h* |
| **Теорема.** Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы. | *Sбок=Pосн\*h* |
| Частным случаем призмы является ***параллелепипед*** – призма, основанием которой служат параллелограммы. |  |
| Основные свойства параллелепипеда: | 1. Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны. 2. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. 3. сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его рёбер. 4. квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений. |
| Если все грани параллелепипеда являются прямоугольниками, то параллелепипед называется ***прямоугольным***. В нём все диагонали равны между собой.  Если боковые рёбра параллелепипеда перпендикулярны основанию, то параллелепипед является ***прямым***.  Куб также является частным случаем призмы.  ***Куб*** есть прямоугольный параллелепипед с равными рёбрами. |  |
| **Объём параллелепипеда** | *V=S\*h* |
| **Объём прямоугольного параллелепипеда** | *V=abc* |
| **Объём куба** | *V =a3* |
| **Диагональ прямоугольного параллелепипеда** | *d2=a2+b2+c2, где d – диагональ, a,b,c – рёбра* |

**Пирамида.**

## *Слово «пирамида» в геометрию ввели греки,*

### которые, как полагают, заимствовали его

*у египтян, создавших самые знаменитые*

*пирамиды в мире. Другая теория выводит*

*этот термин из греческого слова «пирос»*

*(рожь) – считают, что греки выпекали хлебцы,*

*имевшие форму пирамиды.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Определение**. ***Пирамида*** – это многогранник, одна из граней которого – произвольный n – угольник A1A2…An, а остальные грани – треугольники с общей вершиной. |  |
| Этот n – угольник A1A2…An называется ***основанием пирамиды.*** |
| Остальные (треугольные) грани называются ***боковыми гранями*** (A2PA3, …, AnPA1) |
| Общая вершина всех боковых граней называется ***вершиной*** пирамиды (P). |
| Рёбра пирамиды, не принадлежащие основанию, называются её ***боковыми рёбрами*** (PA1, PA2, …, PAn) |
| Объединение боковых граней пирамиды называется её ***боковой поверхностью.*** |
| Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется ***высотой*** пирамиды (РН). |
| Пирамида называется ***правильной***, если её основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её высотой. |  |
| Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется ***апофемой*** этой пирамиды (РЕ). Все апофемы равны друг другу. |
| Если в основании пирамиды лежит n-угольник, то пирамида называется ***n-угольной***.  Треугольная пирамида называется ***тетраэдром***. Тетраэдр называется ***правильным***, если все его рёбра равны (т.о. все грани правильного тетраэдра – равные правильные треугольники). |  |
| Некоторые свойства правильной пирамиды:   * Все боковые рёбра равны между собой * Все боковые грани – равные равнобедренные треугольники * Все двугранные углы при основании равны * Все плоские углы при вершине равны * Все плоские при основании равны * Апофемы боковых граней одинаковы по длине * В любую правильную пирамиду можно вписать сферу | |
| ***Площадью полной поверхности*** пирамиды называется сумма площадей всех её граней. | *Sполн=Sбок+Sосн* |
| ***Площадь боковой поверхности пирамиды –*** сумма площадей её боковых граней. |  |
| **Площадь боковой грани** | *Sбок.гр.=1/2\*m\**/*g*/*, где m – апофема,* /*g*/ - основание грани |
| **Теорема**. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему. | *Sбок=1/2 \* (Pосн\* m), где m – апофема, Р – периметр многоугольника основания.* |
| **Объём пирамиды.** | *V=(1/3)\*Sосн\*h* |

**Усечённая пирамида.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Определение**. ***Усечённая пирамида*** – многогранник, гранями которого являются n-угольники A1A2…An и B1B2…Bn (***нижнее и верхнее основания),*** расположенные в параллельных плоскостях, и n четырёхугольников A1A2B2B1, A2A3B3B2, …, AnA1B1Bn.  Усечённая пирамида является частным случаем пирамиды. |  |
| ***Основания*** усечённой пирамиды – основание исходной пирамиды и многоугольник, полученный при пересечении её плоскостью (A1A2…An и B1B2…Bn). |
| Отрезки A1B1, A2B2, …, AnBn называются ***боковыми рёбрами*** усечённой пирамиды. |
| Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется ***высотой*** усечённой пирамиды (СН). |
| Боковые грани усечённой пирамиды – ***трапеции***. |
| Усечённую пирамиду с основаниями A1A2…An и B1B2…Bn обозначают так: A1A2…AnB1B2…Bn. |
| Усечённая пирамида называется ***правильной***, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усечённой пирамиды – ***правильные многоугольники***, а боковые грани – ***равнобедренные трапеции***. |  |
| Высоты этих трапеций называются ***апофемами*** (КК1) |
| *Свойства усечённой пирамиды:* | 1. Боковые рёбра и высота пирамиды разделятся секущей плоскостью на пропорциональные отрезки 2. В сечении получится многоугольник, подобный многоугольнику, ежащеему в основании 3. Площади сечения и основания будут относится между собой, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды |
| **Теорема**. Если две пирамиды с равными высотами пересечь плоскостями, параллельными основаниям, на одинаковом расстоянии от вершины, то площади сечений будут пропорциональны площади оснований. | |
| ***Площадь поверхности*** усечённой пирамиды | *S=(1/2)\*m\*(P+P1), где m – апофема* |
| **Теорема**. Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему. | *Sбок=1/2\*(Рв+Рн)\* m, где m – апофема, Рв, Рн – периметр верхнего и нижнего оснований* |
| ***Объём*** усечённой пирамиды: | *V=(1/3)\*h\*(S1+√S1S2+S2), где S1, S2 – площади оснований.* |
| ***Площадь боковой грани*** | *Sбок.гр.=1/2\*m\*(g+g1), где m – апофема, g, g1 – основания боковой грани* |

**Тетраэдр.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Определение**. ***Тетраэдр*** – поверхность, составленная из четырёх треугольников. Любая грань может быть принята за основание пирамиды.  Тетраэдр является частным случаем пирамиды. |  |
| Тетраэдр состоящий из треугольников ABC, DAB, DBC, DCA обозначается так: ***DABC*** |
| Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются ***гранями***. |
| Стороны треугольников, из которых состоит тетраэдр, называются ***рёбрами***. |
| Вершины треугольников, из которых состоит тетраэдр, называются ***вершинами*** тетраэдра. |
| Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются ***противоположными***. |
| Иногда выделяют одну грань тетраэдра и называют её ***основанием***, а три другие – ***боковыми гранями.*** |
| ***Медианы*** тетраэдра – отрезки, соединяющие его вершины с центроидами противоположных граней. |  |
| Тетраэдр, все грани которого равны, называется ***равногранным***. |  |
| Свойства равногранного тетраэдра: | 1. описанный параллелепипед равногранного тетраэдра – прямоугольный 2. развёртка тетраэдра, полученная при разрезании его по трём сходящимся в одной вершине рёбрам, - треугольник 3. у него имеются три оси симметрии 4. все трёхгранные углы равны 5. все медианы (тетраэдра) равны 6. все высоты (тетраэдра) равны 7. центры вписанной и описанной сфер и центроид совпадают 8. радиусы описанных окружностей граней равны 9. периметры граней равны 10. площади граней равны |
| Тетраэдр, в вершине которого сходятся три взаимно перпендикулярных ребра, называется ***прямоугольным*** | Для него выполняется своего рода «теорема Пифагора»:  *S2=S21+S22+S23* |
| Тетраэдр, составленный из четырёх равносторонних треугольников, называется ***правильным***. |  |
| **Объём правильного тетраэдра.** | *V=(a3\*√2)/12* |
| **Радиус описанной сферы в правильном тетраэдре** | *R=(a\*√6)/4* |
| **Высота правильного тетраэдра** | *H=(a\*√6)/3* |
| **Площадь поверхности правильного тетраэдра** | *S=a2\*√3* |
| **Радиус вписанной окружности правильного тетраэдра** | *r = (a\*√6)/12* |

**Список используемой литературы**

1. Стереометрия 10, А. Калинин, Д. Терешин, М.,1996
2. Геометрия 10 – 11, Л. Атанасян, М., 1994
3. Школьная шпаргалка, О. Бекетова, С. – Петербург, 1995
4. Математика в кармане, В. Герцев, М., 1996

1. В дальнейшем под многогранником будет пониматься выпуклый. [↑](#footnote-ref-1)