ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ОБНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ (ИАТЭ)

Факультет естественных наук

Р.Т. ГАЛУСАРЬЯН

Сборник задач и упражнений по курсу «Высшая математика»

(1-й семестр, часть II)

Обнинск 2008

УДК 51(076)

Галусарьян Р.Т. Сборник задач и упражнений по курсу «Высшая математика», ч. II.  Обнинск: ИАТЭ, 2008.  76с.

Во второй части сборника включены вопросы, связанные с элементами комбинаторики, математической индукции и комплексными числами. В сборнике приведены индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по темам: 1)Предел функции и непрерывность; 2)Производная. К задачам ИДЗ: Предел функции и непрерывность приведены ответы

Рецензенты: д.ф.-м.н. Е.А.Сатаев ,

к. ф.-м. н. А.Г.Слесарев

Темплан 2008, поз 17

© Р.Т.Галусарьян, 2008г.

© Обнинский государственный технический университет атомной энергетики, 2008 г.

# **Содержание**

Предисловие

Глава 3. Введение в анализ

§3.1 Комбинаторика и бином Ньютона

§3.2 Комплексные числа

Глава 4. Индивидуальные домашние задания

§4.1 ИДЗ «Предел функции и непрерывность»

§4.2 ИДЗ «Производные»

Глава 5. Семинары

§5.1 Применение производной при исследовании функции

§ 5.2 Неопределенный интеграл

Ответы

Литература

Предисловие

Вторая часть сборника задач по курсу «Высшая математика» содержит введение в математический анализ (Глава 3) и индивидуальные домашние задания по теме: «Предел функции и непрерывность» и по теме: «Производная»

Глава 3 содержит следующие темы: комбинаторика, бином Ньютона, математическая индукция и комплексные числа. Приведены основные формулы и методы решения задач.

Глава 4 содержит индивидуальные домашние задания по основным темам курса математического анализа, изучаемым в первом семестре

Глава 5 посвящена семинарским занятиям. Приводится перечень основных вопросов, рассматриваемых на семинаре, задачи, которые необходимо решать на семинаре и задачи для самостоятельной работы.

К задачам главы 3 и к задачам ИДЗ «Предел функции» приведены ответы. Для наиболее сложных задач приводятся решения.

Глава 3. Введение в анализ

§3.1 Комбинаторика и бином Ньютона

## 1. Комбинаторика

1. Число перестановок из *n* элементов равно произведению *n* последовательных натуральных чисел от 1 до *n*.

Число перестановок обозначается так:

 или *n*! (эн-факториал) и вычисляется по формуле:

*n*! =. (1.1)

2. Число размещений (без повторений) из *n* элементов по *к*

 равно произведению *к* последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно *n*:

, (1.2)

или . (1.3)

3. Число сочетаний из *n* элементов по *к* ( ) определяется по формуле:

 (1.4)

или  (1.5)

Из формулы (1.5) следует . (1.6)

4. Размещения с повторениями

Пусть из множества *Х*, состоящего из *n* элементов, надо составить строку из *к* элементов, причем каждый элемент в строке может быть любым элементом из *х*, т.е. в строке элементы могут повторяться.

Общее число всех таких строк есть число размещений из *n* по *k* с повторениями: *А( n, k ) = nk* . (1.7)

В рассмотренном случае каждый элемент строки может принимать n значений. Если в строке  элемент  может принимать  значений, элемент  может принимать  значений, то количество всех таких строк определяют по формуле:

. (1.8)

5. Размещения данного состава

Размещением данного состава  из элементов

множества  называется всякая строка длиной , составленная из элементов множества *X* так, что элемент  повторяется  раз, элемент  повторяется  раз , ..., элемент  повторяется  раз .

Например, если  то  есть

один из вариантов состава 

Число различных размещений состава определяется по формуле:

. (1.9)

2. Бином Ньютона

Формула бинома Ньютона позволяет любой двучлен (бином) возвести в натуральную степень. Эта формула имеет вид:

 (1.10)

или сокращенно 

В разложении бинома *n* + 1 членов. Так как , то

коэффициенты членов разложения, одинаково удаленных от начала и конца, равны между собой. При  получаем формулу для суммы биномиальных коэффициентов:

 (1.11)

Обобщением формулы бинома Ньютона является

полиномиальная формула:

 (1.12)

где  и суммирование ведется по всем наборам .

В частности:





Итак, 

. (1.13)

3. Формула разложения разности n-ых степеней

 (1.14)

4. Метод математической индукции

Для вывода обобщающих формул, как правило, используют метод математической индукции.

Схема-алгоритм метода математической индукции:

1. Проверить справедливость доказываемой формулы для начального значения *n* (это может быть 0 , 1 , 2 , . . . ) .

2. Предположить, что формула справедлива при 

3. Доказать, что формула справедлива и при 

5. Формула Тейлора

Формула Тейлора позволяет данную функцию *y* = *f* (*x*) представить в виде многочлена со счетным числом слагаемых по степеням *x*:

 (1.15)

Формулы Тейлора для некоторых функций.









Следует помнить, что применять формулы (1.15), (1.16) или 1-6 можно для функции только в случае, если при .



Упражнения к § 3.1

Комбинаторика

3.1 Вычислить:





3.2 Решить уравнения и неравенства:

1) 2) 

3)  4) 

5)  6) 

7)  8) 

3.3 Доказать:

1)  ,

2) 

3)  4)

3.4 Сколько пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из пяти цифр:0,1,2,3,4?

3.5 Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр1,2,3,4,5, если цифры в числе:

а) могут повторяться, б) не повторяются?

3.6 В ящике имеется 7 красных и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать из ящика 3 красных и 2 черных шара?

3.7 В вазе 10 красных и 6 белых гвоздик. Сколькими способами можно составить букет из 4-х гвоздик так, чтобы число красных гвоздик в букете было не меньше белых?

3.8 Из 10 различных цветков составляется букет, содержащий не менее трех цветков. Сколькими способами это можно сделать?

3.9 В 12-ти этажном доме на первом этаже в лифт садится 9 человек. Известно, что они выйдут группами в 2, 3 и 4 человека на разных этажах. Сколькими способами они это могут сделать, если на 2-м этаже лифт не останавливается?

Бином Ньютона

3.10 Разложить по формуле бинома Ньютона:

а)  б) , в) , г) .

3.11 Решить уравнения:

1) , 2) ,

3)  , 4) 

Разложение двучлена  на множители

3.12. 1) Сократить дробь  и вычислить при *х=1*,

2) сократить дробь  и вычислить при *a=b*.

Метод математической индукции

3.13 Доказать тождества:



,

,

,

,



3.14 Доказать неравенства:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

3.15 Доказать делимость:

1) 

2) 

3) 

3.16 Известно, что  целое число. Доказать, что

 также целое число.

3.17 Доказать, что выражение , где  простое число, делится на *р* (малая теорема Ферма).

Формула Тейлора

3.18 Разложить по степеням *х* по формуле Тейлора функции:

1) 2) .

3.19 Вычислить приближенно:

1)  с точностью 0,0001,

2)  с точностью 0,001, 3)с точностью 0,001.

§ 3.2 Комплексные числа

Введем новое недействительное число, квадрат которого равен –1. Это число обозначим символом ί и назовем мнимой единицей. Итак,

 (2.1) Тогда . (2.2)

1. Алгебраическая форма комплексного числа

Если , то число  (2.3)

называется комплексным числом, заданным в алгебраической форме. Это число имеет действительную часть

и мнимую часть  Так что ;

 - число, сопряженное .

Действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, выполняются как над многочленами.

Произведение двух сопряженных чисел есть действительное число

 (2.4)

Следовательно, сумму квадратов двух действительных чисел можно разложить на комплексные множители

 (2.5)

Деление чисел выполняется по формуле

 (2.6)

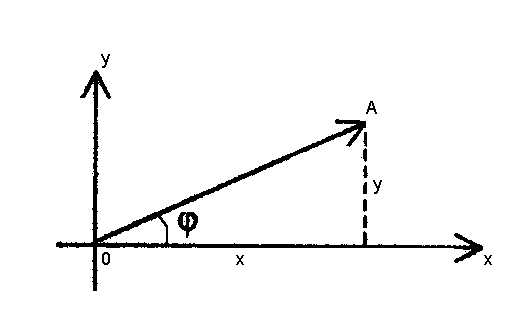
Условия равенства двух комплексных чисел

 (2.7)

2. Геометрическое представление, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Прямоугольную систему координат можно использовать для геометрического представления комплексного числа.

Каждому комплексному числу можно поставить в соответствие точку или вектор  (рис.1).

Рис.1

В этом случае плоскость *х0у* называется комплексной плоскостью ( *z* ), ось *0х* называется действительной осью, ось *0у* называется мнимой осью. Расстояние ОА или длина вектора  называется модулем комплексного числа  Угол  называется аргументом комплексного числа  Очевидно, каждому комплексному числу соответствует бесконечное множество аргументов.

Главное значение аргумента 

Общее значение аргумента 

Так как  и ,

то  (2.9)

Это тригонометрическая форма комплексного числа. Чтобы комплексное число, заданное в алгебраической форме (2.3), представить в тригонометрической форме (2.9), следует найти:

модуль по формуле  (2.10)

аргумент  по формулам :

если  1-ой четверти, то ;

если  2-ой четверти, то ;

если  3-ой четверти, то ; (2.11)

если  4-ой четверти, то ,

где вспомогательный острый угол 

определяют по формуле 

Если  то .

Если  то . ( 2.12)

Если  то .

Если  то .

С помощью формулы Эйлера , (2.13)

можно комплексное число представить в показательной форме

 (2.14)

Если в формуле (2.13) заменить  на -, то получим

 (2.13')

Из (2.13) и (2.13') следуют следующие формулы Эйлера:

 (2.15)

3. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

*Умножение. М*одуль произведения равен произведению модулей, аргумент произведения равен сумме аргументов:

 (2.16)

*Деление*. Модуль частного равен частному модулей, аргумент частного равен разности аргументов:

 (2.17)

*Возведение в целую степень п.* Модуль возводится в степень *п*, аргумент умножается на *п*.

 (2.18)

*Извлечение корня степени п.* Извлекается арифметический корень из модуля, общее значение аргумента делится на *п.* Корень имеет ровно *п* различных значений, если 

(2.19) 

Формулы (2.18) и (2.19) называются формулами Муавра.

Упражнения к § 3.2

3.20 Выполнить действия







 ; 5) ; 6) ; 7) ;

 9) .

3.21 Представить в виде суммы более простых дробей:

1) ; 2) ; 3) .

3.22 Решить уравнения:

1) , 2) , 3) , 4) , 5) , 6) , 7) , 8) , 9) , 10) , 11) .

3.23 Построить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме числа:

1)  , 2) , 3) , 4) ,

5) , 6) , 7) , 8) ,

9) 5, 10) *i.*

3.24 Представить в показательной форме числа (указать главное значение аргумента):

 2) ;

3)  4) ;

5)  6) 

7)  8)  9) 

10) 

11)  12) 

13)  14) 

3.25 Выполнить действия: 1)  2) ,

3) , 4) , 5) ,

6) , 7) , 8) 

9) , 10) ,

11)  , 12) , 13) ,

14) , 15)  16)  17) .

3.26 Найти все значения корней:





3.27. Решить уравнения:





3.28 Выразить через степенииследующие функции:



3.29 Доказать:

1) 

2) 

3) 



 если .

Указание. Воспользуйтесь формулами Эйлера



а также формулой суммы членов геометрической прогрессии.

Глава 4 Индивидуальные домашние задания

4.1 Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) по теме: “Предел функции и непрерывность”

Задача 1. Найти пределы:

Задача 2. Найти пределы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2.1. | | 2.2. | | |
| 2.3. | | 2.4. | | |
| 2.5. | | 2.6. | | |
| 2.7. | | 2.8. | | |
| 2.9. | 2.10. | | | |
| 2.11. | | | |
| 2.13. | |  | | |
| 2.14. | | | |
| 2.15. | | | |
| 2.16. | | | |
| 2.17. | | | |
| 2.18. | | | |
| 2.19. | | | |
| 2.20.  2.21. | |  | | |
| 2.22. | |  | | |
| 2.23. | | | |
| 2.25. | |  | | |
| 2.26.  2.27. | |  | | |
| 2.28. | | |
| 2.29. | | |
| 2.30. | |  | | |

Задача 3. Доказать непрерывность функции *f*(*x*) в точке *x*0.

|  |  |
| --- | --- |
| 3.1. f(x)=6-x2, x0=2 | 3.2. f(x)=3x2-2, x0=-2 |
| 3.3. f(x)=-2x2-3, x0=3 | 3.4. f(x)=2x2+5, x0=-3 |
| 3.5. f(x)=5x2-1, x0=4 | 3.6. f(x)=2-3x2, x0=4 |
| 3.7. f(x)=4x2-3, x0=-1 | 3.8. f(x)=4x2+5, x0=2 |
| 3.9. f(x)=x2+7, x0=-3 | 3.10. f(x)=7-2x2, x0=3 |
| 3.11. f(x)=-2x2-7, x0=2 | 3.12. f(x)=3x2+2, x0=4 |
| 3.13. f (x)=*5x2+3, x0=-2* | 3.14. f(x)=4x2-1, x0=-3 |
| 3.15. f(x)=7x2-1, x0=4 | 3.16. f(x)=-8x2-1, x0=1 |
| 3.17. f(x)=2x2+11, x0=5 | 3.18. f(x)=10x2-3, x0=5 |
| 3.19. f(x)=13-2x2, x0=3 | 3.20. f(x)=3-10x2, x0=4 |
| 3.21. f(x)=4x2-11, x0=-2 | 3.22. f(x)=1-5x2, x0=2 |
| 3.23. f(x)=3-4x2, x0=1 | 3.24. f(x)=-7-x2, x0=1 |
| 3.25. f(x)=x2-6, x0=3 | 3.26. f(x)=9-5x2, x0=-2 |
| 3.27. f(x)=7-5x2, x0=-2 | 3.28. f(x)=-2x2-1, x0=3 |
| 3.29. f(x)=11-3x2, x0=2 | 3.30. f(x)=4x2-15, x0=-1 |

Задача 4. Найти пределы разложением на множители и по правилу Лопиталя.

|  |  |
| --- | --- |
| 4.1. | 4.2. |
| 4.3. | 4.4. |
| 4.5. | 4.6. |
| 4.7. | 4.8. |
| 4.9. | 4.10. |
| 4.11. | 4.12. |
| 4.13. | 4.14. |
| 4.15. | 4.16. |
| 4.17. | 4.18. |
| 4.19. | 4.20. |
| 4.21. | 4.22. |
| 4.23. | 4.24. |
| 4.25. | 4.26. |
| 4.27. | 4.28. |
| 4.29. | 4.30. |

Задача 5. Найти пределы, используя метод освобождения от иррациональности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5.1. | 5.2. | |
| 5.3. | 5.4. | |
| 5.5. | 5.6. | |
| 5.7. | 5.8. | |
| 5.9. | 5.10. | |
| 5.11. | 5.12. | |
| 5.13. | 5.14. | |
| 5.15. | 5.16. | |
| 5.17. | 5.18. | |
| 5.19. | 5.20. | |
| 5.21. | |
| 5.22. | 5.23. | |
| 5.24. | 5.25. | |
| 5.26. | 5.27. | |
| 5.28. | 5.29. | |
| 5.30. |  | |

Задача 6. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно-малые.

|  |  |
| --- | --- |
| 6.1. | 6.2. |
| 6.3. | 6.4. |
| 6.5. | 6.6. |
| 6.7. | 6.8. |
| 6.9. | 6.10. |
| 6.11. | 6.12. |
| 6.13. | 6.14. |
| 6.15. | 6.16. |
| 6.17. | 6.18. |
| 6.19. | 6.20. |
| 6.21. | 6.22. |
| 6.23. | 6.24. |
| 6.25. | 6.26. |
| 6.27. | 6.28. |
| 6.29. | 6.30. |

Задача 7. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые.

|  |  |
| --- | --- |
| 7.1. | 7.2. |
| 7.3. | 7.4. |
| 7.5. | 7.6. |
| 7.7. | 7.8. |
| 7.9. | 7.10. |
| 7.11. | 7.12. |
| 7.13. | 7.14. |
| 7.15. | 7.16. |
| 7.17. | 7.18. |
| 7.19. | 7.20. |
| 7.21. | 7.22. |
| 7.23. | 7.24. |
| 7.25. | 7.26. |
| 7.27. | 7.28. |
| 7.29. | 7.30. |

Задача 8. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые.

|  |  |
| --- | --- |
| 8.1. | 8.2. |
| 8.3. | 8.4. |
| 8.5. | 8.6. |
| 8.7. | 8.8. |
| 8.9. | 8.10. |
| 8.11. | 8.12. |
| 8.13. | 8.14. |
| 8.15. | 8.16. |
| 8.17. | 8.18. |
| 8.19. | 8.20. |
| 8.21. | 8.22. |
| 8.23. | 8.24. |
| 8.25. | 8.26. |
| 8.27. | 8.28. |
| 8.29. | 8.30. |

Задача 9. Используя формулы второго замечательного предела и его следствий, найти пределы функций.

|  |  |
| --- | --- |
| 9.1. | 9.2. |
| 9.3. | 9.4. |
| 9.5. | 9.6. |
| 9.7. | 9.8. |
| 9.9. | 9.10. |
| 9.11 | 9.12. |
| 9.13. | 9.14. |
| 9.15. | 9.16. |
| 9.17. | 9.18. |
| 9.19. | 9.20. |
| 9.21. | 9.22. |
| 9.23. | 9.24. |
| 9.25.  (*a, b*>0) | 9.26. |
| 9.27. | 9.28. |
| 9.29. | 9.30. |

Задача 10. Используя правило Лопиталя и эквивалентность, найти следующие пределы.

|  |  |
| --- | --- |
| 10.1. a) | б) |
| 10.2. а) | б) |
| 10.3. а) | б) |
| 10.4. а) | б) |
| 10.5. а) | б) |
| 10.6. а) | б) |
| 10.7. а) | б) |
| 10.8. а) | б) |
| 10.9. а) | б) |
| 10.10. а) | б) |
| 10.11. а) | б) |
| 10.12. а) | б) |
| 10.13. | б) |
| 10.14. | б) |
| 10.15. а) | б) |
| 10.16. а) | б) |
| 10.17. а) | б) |
| 10.18. а) | б) |
| 10.19. а) | б) |
| 10.20. а) | б) |
| 10.21. а) | б) |
| 10.22. а) | б) |
| 10.23. а) | б) |
| 10.24. а) | б) |
| 10.25. а) | б) |
| 10.26. а) | б) |
| 10.27. а) | б) |
| 10.28. а) | б) |
| 10.29. | б) |
| 10.30. | б) |

Задача 11. Применяя формулу Тейлора, вычислить пределы.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 11.1 | | 11.2. |
| 11.3. | 11.4. | |
| 11.5. | 11.6. | |
| 11.7. | 11.8. | |
| 11.9. | 11.10. | |
| 11.11. | 11.12. | |
| 11.13. | 11.14. | |
| 11.15. | 11.16. | |
| 11.17. | 11.18. | |
| 11.19. | 11.20 | |
| 11.21. | 11.22. | |
| 11.23. | 11.24. | |
| 11.25. | 11.26. | |
| 11.27. | 11.28. | |
| 11.29. | 11.30. | |

Задача 12. Найти точки разрыва, уравнения асимптот и построить схематично график функции.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 12.1. а) | б) | |
| 12.2. а) | б) | |
| 12.3. а) | б) | |
| 12.4. а) | б) | |
| 12.5. а) | б) | |
| 12.6. а) | б) | |
| 12.7. а) | б) | |
| 12.8. а) | | б) | |
| 12.9. а) | | б) | |
| 12.10. а) | | б) | |
| 12.11. а) | | б) | |
| 12.12. а) | | б) | |
| 12.13. а) | | б) | |
| 12.14. а) | | б) | |
| 12.15. а) | | б) | |
| 12.16. а) | | б) | |
| 12.17. а) | | б) | |
| 12.18. а) | | б) | |
| 12.19. а) | | б) | |
| 12.20 .а) | | б) | |
| 12.21. а) | | б) | |
| 12.22. а) | | б) | |
| 12.23. а) | | б) | |
| 12.24. а) | | б) | |
| 12.25. а) | | б) | |
| 12.26. а) | | б) | |
| 12.27. а) | | б) | |
| 12.28. а) | | б) | |
| 12.29. а) | | б) | |
| 12.30. а) | | б) | |

§ 4.2 Индивидуальное домашнее задание по теме: «Производная и ее применение»

Задача 1. Найти первую производную функции:





























































Задача 2. Найти первую производную функции:

2.1.  2.2. 

2.3.  2.4. 

2.5.  2.6. 

2.7.  2.8 

2.9.  2.10. 

2.11.  2.12. 

2.13.  2.14. 

2.15.  2.16. 

2.17.  2.18. 

2.19. 

2.20. 

2.21. 

2.22. 

2.23. 

2.24. 

2.25. 

2.26. 

2.27. 

2.28. 

2.29. 

2.30. 

Задача 3. Найти первую производную функции:

3.1.  3.2. 

3.3.  3.4. 

3.5.  3.6. 

3.7.  3.8. 

3.9.  3.10.  3.11.  3.12. 

3.13.  3.14. 

3.15.  3.16. 

3.17.  3.18. 

3.19.  3.20. 

3.21.  3.22. 

3.23.  3.24. 

3.25.  3.26. 

3.27.  3.28. 

3.29.  3.30. 

Задача 4. Найти первую производную функции:

4.1.  4.2. 

4.3.  4.4. 

4.5.  4.6. 

4.7.  4.8. 

4.9.  4.10. 

4.11.  4.12. 

4.13.  4.14. 

4.15.  4.16. 

4.17.  4.18. 

4.19.  4.20. 

4.21.  4.22. 

4.23.  4.24. 

4.25.  4.26. 

4.27.  4.28. 

4.29.  4.30. 

Задача 5. Найти первую производную функции:

5.1.  5.2. 

5.3  5.4. 

5.5.  5.6. 

5.7.  5.8. 

5.9.  5.10.

5.11. 5.12. 

5.13. 5.14. 

5.15.  5.16. 

5.17.  5.18. 

5.19.  5.20.

5.21.  5.22. 

5.23  5.24. 

5.25.  5.26. 

5.27.  5.28. 

5.29.  5.30.

Задача 6. Найти первую производную функции:

6.1.  6.2. 

6.3.  6.4. 

6.5.  6.6. 

6.7.  6.8. 

6.9.  6.10. 

6.11.  6.12. 

6.13.  6.14. 

6.15.  6.16. 

6.17.  6.18. 

6.19.  6.20. 

6.21.  6.22. 

6.23.  6.24. 

6.25.  6.26. 

6.27.  6.28. 

6.29.  6.30. 

Задача 7. Найти *п*-ую производную функции:

7.1. 



















7.11. 

7.12. 

7.13. 

7.14. 



7.16. 

7.17. 



7.19. 

7.20. 



7.22. 



7.24. 

7.25. 

7.26. 



7.28. 

7.29. 

7.30. 

Задача 8. С помощью формулы Лейбница найти указанную производную данной функции:

8.4.  

8.5.  

8.6.  

8.7.  

8.8.  

8.9.  

8.10.  

8.11. 

8.12.  

8.13.  

8.14.  

8.15.  

8.16.  

8.17.  

8.18.  

8.19.  

8.20.  

8.21.  

8.22. 

8.23.  

8.24.  

8.25.  

8.26.  

8.27.  

8.28.  

8.29.  

8.30. 

Задача 9. Найти первую и вторую производные от функции *у*(*х*), заданной неявно:

9.1.  9.2. 

9.3.  9.4. 

9.5.  9.6. 

9.7.  9.8. 

9.9.  9.10. 

9.11.  9.12. 

9.13.  9.14. 

9.15.  9.16. 

9.17.  9.18. 

9.19.  9.20. 

9.21.  9.22. 

9.23.  9.24. 

9.25.  9.26. 

9.27.  9.28. 

9.29.  9.30. 

Задача 10. Найти первую и вторую производные от функции *у*(*х*), заданной параметрически:

10.1.  10.2. 

10.3.  10.4. 

10.5.  10.6. 

10.7.  10.8. 

10.9.  10.10. 

10.11.  10.12. 

10.13.  10.14. 

10.15.  10.16. 

10.17.  10.18. 

10.19.  10.20. 

10.21.  10.22. 

10.23.  10.24. 

10.25.  10.26. 

10.27.  10.28. 

10.29.  10.30. 

Задача 11. Используя геометрический смысл производной, решить следующую задачу:

11.1 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной в любой точке кривой *у=4х – х2*, равна квадрату абсциссы точки касания.

11.2 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой *у=1 – х2/4*, равна расстоянию от точки касания до начала координат.

11.3 Через произвольную точку кривой *ху = 4* проведена касательная. Доказать, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

11.4 Через произвольную точку кривой *ху = х+2* проведена касательная. Доказать, что касательная пересекает прямую *у = 1* в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

11.5 Доказать, что площадь треугольника, образованного касательной к кривой *у = 2/(1 – х),*ординатой точки касания и осью абсцисс равна 1.

11.6 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной в любой точке кривой *у=3хlnx+5x*, равна утроенной абсциссе точки касания.

11.7 Через произвольную точку кривой *у = а х*3 проведена касательная. Доказать, что абсцисса точки пересечения касательной с осью абсцисс равна 2/3 абсциссы точки касания.

11.8 Через произвольную точку кривой *у=х2* + 2/*х* проведена касательная. Доказать, что площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, равна 3.

11.9 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной в любой точке кривой *у=5х –2 х2*, равна удвоенному квадрату абсциссы точки касания.

11.10 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой *у= х2/2 – 1/2*, равна расстоянию от точки касания до начала координат.

11.11 Через произвольную точку кривой *ху =  2* проведена касательная. Доказать, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

11.12 Через произвольную точку кривой *ху=2х+3* проведена касательная. Доказать, что касательная пересекает прямую *у = 2* в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

11.13 Доказать, что площадь треугольника, образованного касательной к кривой *,* ординатой точки касания и осью абсцисс равна 2.

11.14 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной в любой точке кривой , равна удвоенной абсциссе точки касания.

11.15 Через произвольную точку кривой *у =* 3*х*4 проведена касательная. Доказать, что абсцисса точки пересечения касательной с осью абсцисс равна 3/4 абсциссы точки касания.

11.16 Через произвольную точку кривой *у = х2* + 18/*х* проведена касательная. Доказать, что площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, равна 27.

11.17 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной в любой точке кривой *у= –*3*х2*–1, равна утроенному квадрату абсциссы точки касания.

11.18 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой *у=1/8 – 2х2*, равна расстоянию от точки касания до начала координат.

11.19 Через произвольную точку кривой *ху = 8* проведена касательная. Доказать, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

11.20 Через произвольную точку кривой проведена касательная. Доказать, что касательная пересекает прямую  в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

11.21 Доказать, что площадь треугольника, образованного касательной к кривой *у = 8/(2 – х),*ординатой точки касания и осью абсцисс равна 4.

11.22 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной в любой точке кривой *у=хlnx+*9*x*, равна абсциссе точки касания.

11.23 Через произвольную точку кривой  проведена касательная. Доказать, что абсцисса точки пересечения касательной с осью абсцисс равна 4/5 абсциссы точки касания.

11.24 Через произвольную точку кривой *у=*3*х2* + 8/*х* проведена касательная. Доказать, что площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и перпендикуляром, опущенным из точки касания на ось абсцисс, равна 12.

11.25 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной в любой точке кривой *у =* 3*х – х2*/2 равна половине квадрата абсциссы точки касания.

11.26 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой , равна расстоянию от точки касания до начала координат.

11.27 Через произвольную точку кривой *ху = 12* проведена касательная. Доказать, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

11.28 Через произвольную точку кривой *ху+4х=2* проведена касательная. Доказать, что касательная пересекает прямую  в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

11.29 Доказать, что площадь треугольника, образованного между касательной к кривой *у =* 10*/*(4 *– х*)*,*ординатой точки касания и осью абсцисс равна 5.

11.30 Доказать, что длина отрезка, отсекаемого на оси ординат касательной в любой точке кривой *у=0,5хlnx+2x*, равна половине абсциссе точки касания.

Задача 12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке:

12.1.  12.2. 

12.3. 

12.4. 

12.5. 

12.6. 

12.7. 

12.8. 

12.9. 

12.10. 

12.11. 

12.12. 

12.13. 

12.14. 

12.15. 

12.16 12.17. 

12.18. 

12.19. 

12.20.

12.21.

12.22. 

12.23. 

12.24. 

12.25. 

12.26. 

12.27. 

12.28. 

12.29. 

12.30. 

Задача 13. Исследовать функцию и построить график:

13.1. *а*)  , *б*) 

13.2. *а*)  , *б*) 

13.3. *а*)  , *б*) 

13.4. *а*)  , *б*) 

13.5. *а*)  , *б*) 

13.6. *а*)  , *б*) 

13.7. *а*)  , *б*) 

13.8 *а*)  , *б*) 

13.9. *а*)  , *б*) 

13.10. *а*)  , *б*) 

13.11. *а*)  , *б*) 

13.12. *а*)  , *б*) 

13.13. *а*)  , *б*) 

13.14. *а*)  , *б*) 

13.15. *а*)  , *б*) 

13.16. *а*) , *б*) 

13.17. *а*)  , *б*) 

13.18. *а*) , *б*) 

13.19. *а*) , *б*) 

13.20. *а*)  , *б*) 

13.21. *а*) , *б*) 

13.22. *а*)  , *б*) 

13.23. *а*) , *б*) 

13.24. *а*) , *б*) 

13.25. *а*) , *б*) 

13.26. *а*)  , *б*) 

13.27. *а*) , *б*) 

13.28. *а*)  , *б*) 

13.29. *а*) , *б*) 

13.30. *а*) , *б*) 

Глава 5. Семинарские занятия

§ 5.1 Cеминар: Применение производной при исследовании функции

Основные вопросы

1. Признаки монотонности функции.

2.Необходимое условие существования экстремума.

3. Критические точки на экстремум.

4. Достаточные условия существования экстремума.

5. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

6. Выпуклость и вогнутость графика функции.

7. Точки, критические на перегиб.

8. Необходимое и достаточное условия существования перегиба.

9. Асимптоты графика функции.

Задания для семинара

№1 Доказать монотонность функции на всей числовой оси:

*а*) , *б*) ,

*в*) , *г*) .

№2 При каких *а* функции монотонны всюду:

*а*), *б*) .

№3 Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

*а*) , *б*) ,

*в*) , *г*) .

№4 С помощью 2-го достаточного условия существования экстремума исследовать поведение функции в указанной точке *х*о:

*а*) ,

*б*) ,

*в*) ,

*г*) .

№5 Найти экстремумы, точки перегиба. Построить график.

*а*)  , *б*) .

№6 Определить выпуклость или вогнутость графика функции в окрестности указанных точек:

*а*) ,

*б*) .

№7 Найти асимптоты и построить график: *а*) ,

*б*) .

№8 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

*а*) , *б*) .

Задания для самостоятельной работы

№9 Доказать монотонность функции на всей числовой оси:

*а*) , *б*) , *в*) .

№10 При каких *а* функции монотонны всюду:

*а*), *б*) .

№11 Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

*а*) , *б*) ,

*в*) .

№12 С помощью 2-го достаточного условия существования экстремума исследовать поведение функции в указанной точке *х*о:

*а*) ,

*б*) ,

*в*) ,

*г*) .

№ 13 Найти экстремумы, точки перегиба. Построить график.

*а*)  , *б*)  .

№ 14 Определить выпуклость или вогнутость графика функции в окрестности указанных точек:

*а*) ,

*б*) .

№ 15 Найти асимптоты и построить график:

*а*) , *б*) .

№16 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

*а*), *б*) .

Ответы

2. *а*) ; *б*) при , при  .

3. *а*) при, при ,

;

*б*) ;

*в*) 

;

*г*) ) 

4. *а*) , *б*) , *в*) нет экстремума, *г*) *х*о не является критической точкой.

5. *а*) ,

*; б*) , ,*.*

6. *а*)- выпуклый график, -вогнутый; *б*) - выпуклый график, -вогнутый.

7. *а*)  - вертикальные асимптоты, наклонная асимптота,  ; *б*) горизонтальная асимптота, *в*)  .

8. *а*) ; *б*) .

10. *a*) , *в*) .

11. *а*) ,   *б*)  , *в*) .

12. *а*) , *б*) , *в*) нет экстремума, *г*) *х*о не является критической точкой.

13. *а*) нет точек экстремума, 

б) 

14. *а*)- выпуклый график, -вогнутый; *б*) - вогнутый график, - выпуклый.

15. *а*) горизонтальные асимптоты,  ;

*б*) .

16. *а*) , *б*) 

§ 5.2 Семинар: Неопределенный интеграл

Вопросы к семинару:

1. Первообразная и неопределенный интеграл.

2.Таблица интегралов. Вычисление неопределенных интегралов с помощью таблицы интегралов.

3. Нахождение интегралов методом компенсирующего множителя или введением под знак дифференциала.

4. Нахождение интегралов с помощью замены.

5. Метод интегрирования по частям.

Таблица простых интегралов

( *х* – независимая переменная) 



Таблица интегралов сложных функций 







Формула интегрирования по частям 

Таблица выбора функции *U(x)*

|  |  |
| --- | --- |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |

Правила применения таблицы:

1. Если подынтегральное выражение является произведением функций из разных строк таблицы, то за U принимается функция, стоящая в таблице выше. Оставшееся выражение принимается за dV. При этом, выбирая U , следует всегда заботиться о том, чтобы dV было легко интегрируемым.

2. Если же подынтегральное выражение будет произведением функций из одной строки, то за U можно принять любую из этих функций. При этом интегрирование по частям, как правило, применяют дважды и получают равенство - уравнение, в котором неизвестным является искомый интеграл.

Задания для семинара

№1 Вычислить с помощью таблицы интегралов

*а*), *б*) ,

*в*), *г*) .

№2 Найти интегралы методом компенсирующего множителя или введением под знак дифференциала

*а*), *б*) , *в*), *г*),

*д*) ,

*е*) ,

*ж*) ,

*з*) ,

*и*) .

№3 (Устно) Найти интегралы

*а*), *б*), *в*), *г*),

*д*) ,

*е*) ,

*ж*) , *з*) .

№4 Найти интегралы с помощью замены переменной:

*а*), *б*), *в*), *г*).

№5 Найти интегралы методом интегрирования по частям:

*а*) , *б*) , *в*) , *г*) . *д*) *е*), *ж*)

Задания для самостоятельной работы

№6 Вычислить с помощью таблицы интегралов

*а*) ,

*б*) ,

*в*)  , *г*)  .

№7 Найти интегралы методом компенсирующего множителя или введением под знак дифференциала

*а*)  *б*), *в*) ,

*г*), *д*), *е*), *ж*),

*з*), *и*) , *к*) .

№8 Найти интегралы методом интегрирования по частям:

*а*)  , *б*) , *в*), *г*),

*д*)*е*). *b*) 

# **Ответы к гл. 3**

3.1 1) 24, 2) *п*(*п*+1)(*п*+2), 3) , 4) , 5)336, 6) 120, 7) 4950, 8) .

3.2 1) 6;11, 2) 5, 3) 7, 4) 5, 5) 4, 6) 13, 7) 2;3;4;5;6;7;8;9, 8) 5;6;7;8;9;10.

3.3 3) Доказательство. 

 .

4) Доказательство. Используем равенство, доказанное в предыдущем номере. Имеем:



3.4 96. 3.5 А)125, б) 24. 3.6 350. 3.7 1605. 3.8 968.3.9 720. 3.10. а) 

б)  в) 

 г) 

. 3.11. 1) +3; -3, 2) +2; -2, 3)-2; 0, 4) 0; 2.

3.12 1) 3.14. 2) Доказательство. Для *п*=1 неравенство верно , т.к. . Пусть неравенство верно для всех номеров *п* от 1 до *к*. Докажем, что оно верно и для *п = к* +1. Имеем: 

3.14. 5) Т.к. ,  и 48>36, то неравенство верно для *п* =2. Пусть оно верно для всех . Докажем, что оно верно и для *п* = *к* + 1. Имеем:





, что и требовалось.

3.16 Т.к. , то  целое и, следовательно, для *п* = 2 предложение выполняется. Пусть оно выполняется для всех . Докажем, что оно выполняется и для *п* = *к* + 1. Имеем:

, что и требовалось.

3.18 1) 

 2)

.

3.19 1) 0,2594, 2) 2,2359 , 3) 2,547.

3.20 1)—132—42i , 2) 23—5i , 3) 18+i , 4) 5) 2i—3,

3.21 

3.22 

7) –i;--2—i, 8)-1-i;-3-i, 9) 3-3i ;3i-1, 10)3+i;1-2i, 11)-i;1 +2i.

3.23. 

,   

3.24 







3.25 





3.26. 













3.27. 





3.28.



.

# **Ответы к ИДЗ: Пределы и непрерывность**

Вариант 1. 1. 0. 2. -3. 4. -2. 5. 0. 6. 4. 7. . 8. 7. 9. . 10 а. 4. 10б. 1. 11. -1/6. Вариант 2. 1. . 2. -1/2. 4. 5/4. 5. 0. 6. . 7. . 8. . 9. . 10 а. 0. 10б. 1. 11. -1/6

Вариант 3. 1. 0. 2. -3. 4. -2. 5. 0. 6. 4. 7. . 8. 7. 9. . 10 а. 4. 10б. 1. 11. –1/6. Вариант 4. 1. -3/2. 2. 0. 4. 3. 5. -2/3. 6. -16. 7.  . 8. . 9. e-1/2. 10 а. 1. 10б. . 11. 4.

Вариант 5. 1. . 2. 1/2. 4. 3/2. 5. . 6. 1/4. 7. -1/8. 8. -1/2. 9. 1/e. 10 а. 0. 10б. 1. 11. -3/128.

Вариант 6. 1. 5/2. 2. 3. 4. -1. 5. 0,6. 6. -1. 7. 1/4. 8. 2(1-ln3)/9 . 9. . 10 а. . 10б. 1. 11. -13/40.

Вариант 7. 1. . 2. -1/5. 4. 2. 5. 0. 6. -2e. 7. -2ln2 8. (-5/2)ln2. 9.  . 10 а. -1/2. 10б. 1. 11. -1/72.

Вариант 8. 1. 0. 2. 2/3. 4. 3. 5. 0. 6. -1/6. 7. . 8. 5ln3-7ln2. 9. 2e. 10 а. 2/3. 10б. 1. 11. -3/4.

Вариант 9. 1. 0. 2. 4/3. 4. 0. 5. 2,4. 6. . 7. -2/3π. 8. 2. 9. 3/7. 10 а. -1/2. 10б. 1. 11. -3/4.

Вариант 10. 1. . 2. -1. 4. 0. 5. 0. 6. -2/3. 7. 0. 8. . 9. 1. 10 а. . 10б. e3. 11. -4.

Вариант 11. 1. 1/2. 2. 1/2. 4.-3. 5. 4. 6. -1/2e. 7. 8. 8. ln700. 9. . 10 а. 1/64. 10б. . 11. -1.

Вариант 12. 1. . 2. 11/18. 4. 0. 5. 1,5, 6. 2/5. 7. π/8. 8. 3.

9. . 10 а. 0. 10б. 1. 11. 11/18.

Вариант 13. 1. 3. 2. 1. 4. -1/3. 5. . 6. -10. 7. . 8. 4. 9. . 10 а. 0. 10б. 0. 11. -13.

Вариант 14. 1. 0. 2. 1/8. 4. 3. 5. . 6. 1/π. 7. .

8. ln25/8. 9.  . 10 а. 1. 10б. 1. 11. -1/3.

Вариант 15. 1. 4. 2. 1/6. 4. -2/3. 5. -4/3. 6. 3/8. 7. .

8. 7ln2-5ln3. 9. 1/e. 10 а. 1. 10б. 1. 11. -0,3.

Вариант 16. 1. 1. 2. 1/6. 4. . 5. 1/4. 6. . 7. -8. 8. 3-ln2. 9. 1/5. 10 а. 1/6. 10б. 1. 11. -11/24.

Вариант 17. 1. 2. 2. 1/15. 4. -1. 5. -1/2. 6. . 7. -2. 8. -9. 9. . 10 а. -1/3. 10б. 1. 11. -1.

Вариант 18. 1. 1. 2. 1/5. 4. -2/5. 5. -1/2. 6. . 7. . 8. 5ln4-2ln9. 9. . 10 а. . 10б. 1. 11. -3.

Вариант 19. 1. -2. 2. -3. 4. 1/3. 5. 4/3. 6. -1/4. 7. . 8. ln12+3ln5. 9. 9. 10 а. 2. 10б. 1. 11. 1/12

Вариант 20. 1. 1. 2. -1. 4. 3. 5. . 6. . 7. 0. 8. . 9. . 10 а. 1. 10б. . 11. 1/16

Вариант 21. 1. 1. 2. 3/2. 4. 1/3. 5. 5/2. 6. -2/3. 7. 1/2. 8. 6. 9. . 10 а. -2. 10б. 1. 11. -1.

Вариант 22. 1. 1. 2. 5/2. 4. 2. 5. 1. 6. 7/2. 7. . 8. 5. 9. e21/2. 10 а. 0. 10б. 0. 11. -8/3

Вариант 23. 1. -2. 2. -7/2. 4. 2. 5. 1/3. 6. 1/12. 7. . 8.  . 9. . 10 а. -2. 10б. е. 11. -8/16

Вариант 24. 1. 2. 2. 5/4. 4. -9. 5. -1/3. 6. -3. 7. 2ln23. 8. 2ln42. 9. e-4/9. 10 а. 1. 10б. . 11. -1/4.

Вариант 25. 1. 2. 2. . 4. -7/8. 5. 2/27. 6. -5/3. 7. . 8. -1. 9. . 10 а. 0. 10б. 1. 11. -5

Вариант 26. 1. -1. 2. 2/3. 4. -5/8. 5. -11/4. 6. 1/8. 7. . 8. 2. 9. e-3 . 10 а. -1/2 . 10б. 1. 11. 2.

Вариант 27. 1. -1. 2. 5/4. 4. 10/3. 5. 9/2. 6. 50. 7. . 8. . 9. e1/3. 10 а. -1/3. 10б. 1. 11. 2.

Вариант 28. 1. -3/2. 2. 3. 4. 3/2. 5. -1/8. 6. -1. 7. . 8.  . 9. e2. 10 а. 5/8. 10б. 1. 11. -2

Вариант 29. 1. 2. 2. 1/12. 4. 3/2. 5. 2/3. 6. 3/2. 7. . 8. -5/4. 9. . 10 а. . 10б. . 11. -27/4.

Вариант 30. 1. . 2. . 4. 0. 5.  . 6. 6. 7. . 8. 2ln7-3. 9. . 10 а. . 10б. 1. 11. .

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.М.: Наука, 1997.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.  М.: Наука, 1997.

3.. Виноградова И.А, Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу.М.: Наука, 1986.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике.  М.: Высшая школа, 1990.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике, ч. 1, Под ред. А.П. Рябушко. Минск: Высшая школа, 1990.

6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.  М.: Высшая школа, 1990.

7. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии.Минск: Высшая школа, 1990.

8. Галусарьян Р.Т. Введение в математический анализ. Обнинск: ИАТЭ, 2002.

9. Галусарьян Р.Т. Методические рекомендации и варианты контрольных работ по математическому анализу. Обнинск: ИАТЭ, 1998.

Редактор О.Ю. Волошенко

Компьютерная верстка Р.Т.Галусарьян

ЛР № 020713 от 27.04.98

Подписано к печати Формат бумаги 60х84/16

Печать ризограф, Бумага KYMLUX Печ. л 5

Заказ N Тираж 50 экз. Цена договорная

Отдел множительной техники ИАТЭ, 249040, г. Обнинск, Студгородок,1