***Пошукова робота на тему:***

*Теореми Ролля, Лагранжа, Коші. Правило Лопіталя. Формула Тейлора для функції однієї та двох змінних.*

**План**

* Основні теореми диференціального числення
* Теорема Ролля
* Теорема Лагранжа
* Теорема Коші
* Правило Лопіталя
* Формула Тейлора для многочлена
* Формула Тейлора для довільної функції
* Формула Тейлора для функції двох змінних

**6.12. Основні теореми диференціального числення**

У курсі математичного аналізу одне з центральних місць займають так звані теореми про середнє значення, до яких належать теореми Ролля, Лагранжа і Коші. В цих теоремах йдеться про те, що коли функція та її похідна першого порядку задовольняють певним умовам, то всередині інтервалу  знайдеться точка, в якій функція має певні властивості (про ці властивості йдеться в теоремі). Тому й самі теореми називають теоремами про середнє.



**6.12. 1. Теорема Ролля**

            Теорема. Нехай функція  задовольняє умовам:



            1) визначена і неперервна на відрізку :



            2) диференційована в інтервалі ;



            3) на кінцях відрізка набуває однакових значень: .



            Тоді всередині інтервалу  знайдеться хоча б одна точка  в якій .



            Д о в е д е н н я.

Випадок 1.  Функція  на відрізку  є сталою:



            .



            Тоді , тобто в кожній точці  похідна дорівнює нулю, а тому за точку  можна взяти будь-яку точку інтервалу і для цієї точки теорема буде справедлива.



            Випадок 2.  Функція  не є тотожною сталою на відрізку . Оскільки  за умовою теореми не є неперервною, то вона на відрізку  набуває найбільшого і найменшого значень. Позначимо найбільше значення через , а найменше – через . Зрозуміло, що в розглянутому випадку .



            Через те, що , то хоча б одне з чисел  або досягається функцією всередині інтервалу . Нехай, наприклад, число  досягається функцією всередині інтервалу , тобто існує хоча б одна точка, позначимо її , в якій



.



Покажемо, що .



Справді, оскільки  є найменше значення функції  на відрізку , то це число буде найменшим і серед значень функції, які вона набуває для всіх  з деякого досить малого околу точки . Позначимо цей окіл через .



Тоді для всіх  справджуватимуться нерівності



                 при     ,



                 при     .



            Розглянемо відношення       , для якого справедливі нерівності



                     при     ,



                       при     ,



причому .



            Перейдемо в цих нерівностях до границі, коли . Тоді границя відношення, яке стоїть в лівій частині нерівностей, існує і дорівнює похідній , тому



,       .



Звідси випливає, що . Теорему доведено



            З’ясуємо геометричний зміст теореми Ролля (рис.6.9):

            1) графік функції є суцільна лінія (- неперервна на відрізку);



            2) крива, що є графіком функції, є гладкою кривою (крива називається гладкою, якщо в кожній її точці можна провести дотичну);

            3) крайні точки графіка знаходяться на однаковій висоті від .



**6.12. 2.  Теорема Лагранжа**



            Теорема. Якщо функція : 1) задана і неперервна на відрізку ; 2) диференційована в інтервалі , то тоді всередині інтервалу  знайдеться хоча б одна точка , в якій справджуються рівність



                             .                              (6.73)



            Д о в е д е н н я.     Розглянемо функцію

,



що задовольняє всім умовам теореми Ролля. Справді,  на відрізку  є неперервною (як різниця двох неперервних функцій), а всередині інтервалу  має похідну



;



.



            Отже, існує точка  в якій  або, що саме,



звідси



            Теорему доведено.

            Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа. Нехай графік функції зображено на рис. 6.10. Відношення є кутовий коефіцієнт січної , а - кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою . Обидва кутові коефіцієнти однакові. Отже, дотична і січна паралельні. Тому висновок теореми Лагранжа можна сформулювати так: на дузі знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до кривої паралельна  хорді .



            Оскільки , то можемо записати:



.

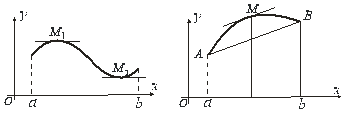


                   Рис.6.19                                Рис.6.10

            Отже, рівність (6.73) можна записати в такому вигляді:

,



або

.



            Зокрема, покладемо , одержимо рівність



.



            Вираз, який стоїть у лівій частині останньої рівності, є не що інше, як приріст  функції в точці . Отже, дістаємо формулу



                          .          (6.74)



            Формула (6.74) виражає точне значення приросту функції



в точці  за будь-якого скінченого значення приросту аргументу   і має назву формули скінчених приростів.



            Наслідок 1.   Якщо функція  на проміжку має похідні   і   за будь-якого , то  на даному проміжку є сталою.



Д о в е д е н н я.  Візьмемо в проміжку дві довільні точки  Тоді функція  на відрізку  задовольняє умовам теореми Лагранжа і справедливою є рівність



.



            Проте  при будь-якому , зокрема і при , дорівнює нулю. Тоді з попередньої нерівності випливає:, або .



Оскільки  і   - довільні точки проміжку  і функція  у цих точках набуває однакових значень, то  є сталою.



Тепер ми можемо сформулювати такий критерій сталості диференційованої функції на заданому проміжку: для того, щоб диференційована на проміжку функція  була сталою, необхідно і достатньо, щоб  в кожній точці цього проміжку дорівнювала нулю.



Наслідок 2.    Якщо функції  і   на проміжку мають похідні ,   і  за будь-якого , то різниця між цими функціями  є величина стала.



Д о в е д е н н я.   Позначимо різницю  через : .



Тоді функція  на проміжку  має похідну :



.



Проте , тому . Звідси випливає, що  або, що те саме, .



**6.12.3. Теорема Коші**

            Теорема. Нехай: 1) функції  і   задані і неперервні на відрізку ; 2) диференційовані в інтервалі ; 3) похідна  всередині інтервалу  не дорівнює нулю. Тоді всередині інтегралу  знайдеться така точка , що має місце рівність



                                      .               (6.75)



**6.13. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя**

Розглянемо невизначеність виду .



            Теорема 1.    Нехай для функцій   і   виконуються умови:



1) функції визначені на півінтервалі   і



;



2) в інтервалі   диференційовані, причому  для всіх ;



3) існує (скінчена або нескінченна ) границя

.



Тоді існує границя відношення  при і ця границя дорівнює теж числу , тобто



.



Висновок цієї теореми читають ще так: границя відношення функції дорівнює границі відношення похідних від цих функцій.

Наведену теорему називають першим правилом Лопіталя.

Зауваження 1. Може статися, що поряд з рівностями  виконуються рівності



Нехай



тоді, застосовуючи двічі доведену теорему, дістаємо таку рівність:



Взагалі цей спосіб можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення   яке має при  певну границю. Тоді



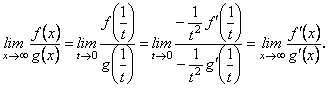
У цьому випадку кажуть, що правило Лопіталя використовується  разів.



Зауваження 2.  Теорема 1 при виконанні її умов справджується і тоді, коли точка  є невласною, тобто . У цьому випадку



Справді, застосувавши підстановку , маємо



            Сформулюємо другу теорему Лопіталя, яка стосується розкриття невизначеності виду



Теорема 2. Нехай для функцій і  виконуються умови:



1)      функції визначені на півінтервалі і при цьому



2)      функції диференційовані в інтервалі  причому



3)      існує ( скінчена або нескінченна) границя



Тоді

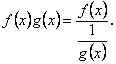
.



Зауваження 3. Крім невизначеностей  є ще й інші невизначеності:  Проте всі вони зводяться до невизначеності або



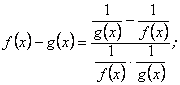
            Справді, нехай, наприклад, маємо невизначеність Інакше кажучи, нехай маємо функції  і  такі, що  Тоді добуток  можна зобразити у вигляді частки:



Отже, у правій частині ми маємо невизначеність виду



            Якщо маємо невизначеність , тобто  і то різницю  можна записати:



отже, в правій частині маємо невизначеність виду



            Якщо маємо степінь і  тобто невизначеність виду , то її розкривають так.



            Припускаючи, що , вираз має вигляд



            У показнику при  маємо невизначеність виду , яка (це було показано вище) зводиться до невизначеності . Аналогічно невизначеності  розкриваються невизначеності , .



            Приклади.  Користуючись теоремами Лопіталя, знайти границі функцій:

1.                    2.      3.



              4.        5.      6.



              7.    8.



            Р о з в ’ я з о к.  Перевіримо виконання умов теорем Лопіталя для першого прикладу. Для прикладів пропонуємо умови теорем перевірити самостійно.

            1. Нехай . Розглядатимемо пів інтервал, де - довільне число. Тоді  . Знаходимо похідні за будь-якого , а потім



.



Отже, виконуються всі три умови першої теореми Лопіталя. Тому

.



            2. Маємо невизначеність виду . Використавши першу теорему Лопіталя, одержимо



.



            3. Маємо невизначеність виду , тому використовуємо другу теорему Лопіталя:



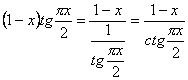
.



            4. Маємо невизначеність виду . Зводимо її до невизначеності . Для цього запишемо  у вигляді



.



Отже, дістали невизначеність . Тому



.



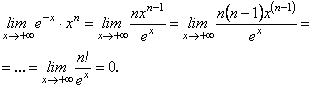
            5. Маємо невизначеність . Запишемо добуток



так: . Дістали невизначеність . Тому



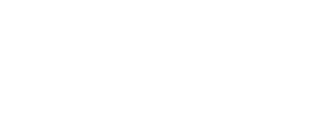
            Під знаком границі в правій частині останньої рівності знову маємо випадок, коли чисельник і знаменник прямують до , тобто маємо ту саму невизначеність . Застосувавши  раз друге правило Лопіталя,  дістаємо



6. Маємо невизначеність . Тоді



Знайдемо границю показника:



тому



            7.Маємо невизначеність виду . Запишемо даний вираз:



. Дістали невизначеність .



Отже,

.



            8. Маємо невизначеність виду . Запишемо даний вираз:

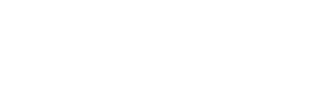


.



            Знайдемо границю показника:

.



Отже,



**6.14. Формула Тейлора**

**6.14.1. Формула Тейлора для многочлена**

            Нехай задано многочлен



де - довільні дійсні числа, які називаються коефіцієнтами многочлена.



            Виразимо коефіцієнти даного многочлена через значення многочлена  та його похідні.



            З цією метою будемо послідовно диференціювати многочлен. Матимемо



.   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .



            Підставляючи в ці рівності , дістаємо



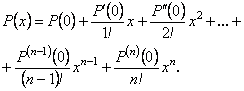
.   .   .  .   .   .   .   .  .  .



            Тоді многочлен  набуде вигляду



                               (6.76)



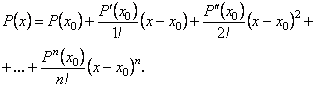
            Може трапитися, що многочлен  буде записаний за степенями різниці , де - довільне дійсне число:



- дійсні числа. Тоді многочлен  можна записати так:



             (6.77)



            Формулу (6.77) називають формулою Тейлора для многочлена.

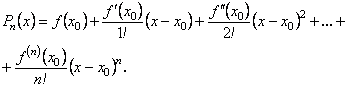
**6.14.2. Формула Тейлора для довільної функції**

            Візьмемо довільну функцію , яка в околі деякої точки і в самій точці  має похідні до -го порядку включно.



            Тоді для такої функції можна побудувати многочлен

    (6.78)



            Цей многочлен називається многочленом Тейлора для функції



            Розглянемо таку різницю:



Оскільки  залежить від  то й  залежить від

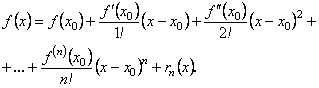


            Тоді



або

       (6.79)



            Формула (6.79) називається *формулою Тейлора* для функції  а функція - залишковим членом формули Тейлора.



            Отже, формула Тейлора (6.79) відрізняється від формули Тейлора (6.77) для многочлена тим, що вона містить залишковий член Виразимо  через похідну -го порядку від функції



            Теорема. Якщо  в деякому околі, наприклад, на відрізку  точки  має неперервні похідні до -го порядку включно, то залишковий член  у формулі Тейлора можна записати у вигляді



                                   (6.80)

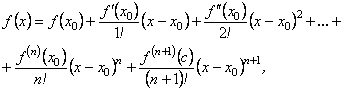


де



Формула (6.79) записується тепер у вигляді

         (6.81)



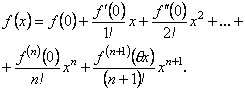
і справедлива для будь-якого



            Формула (6.81) називається формулою Тейлора із залишковим членом виду Лагранжа. Якщо в цій формулі покласти , то матимемо так звану формулу Маклорена



                               (6.82)



            Враховуючи вирази для диференціалів різних порядків функції можна записати формулу (6.81) в диференціальній формі:



            (6.83)

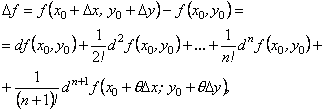


**6.14.3. Формула Тейлора для функції двох змінних**

            Нехай функція  має в околі точки  неперервні частинні похідні до -го порядку включно. Формулу Тейлора зручно записати в диференціальній формі:



        (6.84)



де



            Аналогічний вигляд має формула Тейлора для функції більшого числа змінних.