Міністерство освіти і науки України

Полтавський державний педагогічний університет

# імені В.Г. Короленка

# Кафедра математичного анілізу та інформатики

# 

# Курсова робота з математики

# ІНТЕГРАЛ СТІЛТЬЄСА

# Виконала студентка групи М-41

# Лозицька Тетяна Петрівна

# Науковий керівник

# канд. фіз.-мат. наук, доцент

# Кононович Тетяна Олександрівна

# 

# Полтава-2008

# ЗМІСТ

[ВСТУП](#_Toc216440158)

[§1.Визначення інтегралу Стілтьєса](#_Toc216440159)

[§2. Існування інтегралу Стілтьєса](#_Toc216440160)

[2.1. Загальні умови існування інтегралу Стілтьєса.](#_Toc216440161)

[2.2. Класи випадків існування інтегралу Стілтьєса](#_Toc216440162)

[§3. Властивості інтегралу Стілтьєса](#_Toc216440163)

[§4. Інтегрування за частинами](#_Toc216440164)

[§5.Зведення інтеграла Стілтьєса до інтегралу Рімана](#_Toc216440165)

[§6. Обчислення інтегралів Стілтьєса](#_Toc216440166)

[§7. Приклади обчислення інтеграла Стілтьєса](#_Toc216440167)

[§8.Граничний перехід під знаком інтеграла Стілтьєса](#_Toc216440168)

[ВИСНОВКИ](#_Toc216440169)

[СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ](#_Toc216440170)

# ВСТУП

Інтегрування у XIX сторіччі в основному пов’язано з теорією тригонометричних рядів. Інтеграл Стілтьєса виник в зовсім новій, нетрадиційній області, а саме в теорії ланцюгових дробів, залишаючись в межах цієї теорії він був частиною мало помітною, специфічним узагальненням інтеграла Рімана. Таким він був близько 15 років. Ф. Пісс в 1910 р. надрукував замітку, змістом якої була формула, яка виражала інтеграл Стілтьєса від неперервної функції ***f(x)*** через інтеграл Лебега від деякої сумовної функції другого аргументу.

Лебег пропонує на основі даного ним представлення інтеграла Стілтьєса визначити інтеграл Стілтьєса від розривної функції. У 1914р. Юнг показав, що метод монотонних послідовностей, застосований до інтеграла Стілтьєса, досить просто призводить до того ж узагальнення.

У зв’язку з переходом в простір більшого числа змінних до кінця сформулювалась точка зору на інтеграл, як на функцію множини. Така точка зору стала особливо родючою для теорії і дозволила серед множини визначень виділити таке поняття диференціювання, в термінах якого ця теорія набуває єдиної форми, незалежно від кількості змінних.

Дана тема представлена в інтегральному численні і вивчається як додатковий розділ курсу математичного аналізу.

Метою роботи є вивчення умов існування, властивостей, методів обчислення інтеграла Стілтьєса. Відповідно до мети поставлені наступні завдання:

1. Ввести означення інтегралу Стілтьєса.
2. Визначити умови його існування та класи інтегрованих за Стілтьєсом функцій.
3. Вивчити процес зведення інтегралу Стілтьєса до інтегралу Рімана.
4. Розглянути приклади обчислення та граничний перехід під знаком інтегралу Стілтьєса

# §1. Визначення інтегралу Стілтьєса

Інтеграл Стілтьєса (Th.J. Stieltjes[[1]](#footnote-1)) - є безпосереднім узагальненням звичайного інтегралу Рімана. Визначається він наступним чином:

Нехай на проміжку [a,b] задані дві обмежені функції ***f(x)*** і ***g(x).*** Розкладемо точками

**** (1)

проміжок [a,b] на частини і покладемо . Обравши у кожній з частин [] (*i=0,1,…,n-1*) за точкою  обрахуємо значення **** функції ***f(x)*** і помножимо його на відповідний проміжку [] приріст функції ***g(x)***



Нарешті, складемо суму всіх таких добутків:

 (2)

Ця сума має назву суми Стілтьєса.

Скінченна границя ***суми Стілтьєса*** , коли  прямує до нуля ***називається інтегралом Стілтьєса функції f(x) no функції g(x)*** и позначається символом

 (3)

Іноді, коли необхідно підкреслити, що інтеграл розглядається у сенсі Стілтьєса, вживають позначення

(S)  або 

Границя тут розуміється в тому ж сенсі, що і у випадку зі звичайним визначеним інтегралом. Точніше кажучи, число *I* називається інтегралом Стілтьєса, якщо для будь-якого числа > 0 існує таке число >0, що як тільки проміжок [a,b] розбитий на частини так, що , одразу ж виконується нерівність , яким би чином не обиралися точки  у відповідних проміжках.

При існуванні інтеграла (3) також говорять, що *функція  на проміжку  інтегровна по функції .* Очевидно, що єдина відміна даного визначення від звичайного визначення інтегралу Рімана полягає в тому, що  множиться не на приріст  незалежної змінної, а на приріст  другої функції. Таким чином, інтеграл Рімана є частковим випадком інтегралу Стілтьєса, коли в якості функції  взято саму незалежну змінну : = [1;8]

**§2. Існування інтегралу Стілтьєса**

# 

# 2.1 Загальні умови існування інтегралу Стілтьєса

Встановимо загальні умови існування інтегралу Стілтьєса, обмежуючись припущенням, що функція  монотонно зростає.

Звідси слідує, що при  тепер всі , подібно тому, як раніше було . Це дозволяє послідовно замінюючи лише  на  повторити всі побудови.

Аналогічно до сум Дарбу, і тут доцільно ввести суми

, ,

де і ***Mi*** означають, відповідно, нижню і верхню точні межі функції  в - тому проміжку . Ці суми будемо називати ***нижньою і верхньою сумами Дарбу-Стілтьєса.*** Перш за все, ясно, що (при одному й тому самому розбитті) , причому  і  служать точними межами для стілтьєсових сум . Самі ж суми Дарбу-Стілтьєса мають дві наступні властивості:

1. *Якщо до наявних двох точок розбиття додати нові точки, то нижня сума Дарбу-Стілтьєса може від цього лише зрости, а верхня сума – лише зменшитися.*
2. *Кожна нижня сума Дарбу-Стілтьєса не перебільшує кожної верхньої суми, хоча б і такій, що відповідає іншому розбиттю проміжку.*

Якщо ввести *нижній і верхній інтеграли Дарбу-Стілтьєса:*

= і ,

то виявляється, що .

Нарешті, за допомогою сум Дарбу-Стілтьєса легко встановити для випадку, що розглядається, основну ознаку існування інтегралу Стілтьєса:

**Теорема.** *Для існування інтегралу Стілтьєса необхідно і достатньо, щоб виконувалося*

*, або , (4)*

*якщо під , як зазвичай, розуміти коливання  функції  в -му проміжку .*

# 2.2 Класи випадків існування інтегралу Стілтьєса

1. *Якщо функція а функція  має обмежену зміну, то інтеграл Стілтьєса*

** (5)

*існує.*

Спочатку припустимо, що  монотонно зростає, тоді за довільно заданим , враховуючи рівномірну неперервність функції , знайдеться таке , що на будь-якому проміжку, довжина якого менше , коливання  буде менше за . Нехай тепер проміжок  розбитий на частини так, що . Тоді всі < і

,

звідки й слідує виконання умови (4), а, отже, і існування інтеграла також.

У загальному випадку, якщо функція  має обмежену зміну, її можна представити у вигляді двох зростаючих обмежених функцій: . У відповідності до цього, перетворюється і сума Стілтьєса, що відповідає функції :



Так, за вже доведеним, кожна із сум  і  при прямує до граничної межі, це справедливо і відносно суми , що і треба було довести.

Можна послабити умови, що накладаються на функцію  якщо одночасно посилити вимоги до функції :

1. *Якщо функція  інтегровна на проміжку  за Ріманом, а задовольняє умові Ліпшиця:*

 (6)

,

*то інтеграл (5) існує.*

Для того, щоб знов мати можливість застосувати встановлений вище критерій, припустимо спочатку функцію  як таку, що не лише задовольняє умові (6), але і монотонно зростаючу.

Враховуючи (6), очевидно , так, що



Але остання сума при  і сама прямує до нуля, як наслідок інтегровності (за Ріманом) функції , а тоді прямує до нуля і перша сума, що доводить існування інтеграла (5).

У загальному випадку функції , що задовольняє умові Ліпшиця (6), представимо її у вигляді різниці

=.

Функція =, очевидно, задовольняє умові Ліпшиця, і в той же час монотонно зростає. Теж саме справедливо і для функції =, так як в силу (6), при 

 і

.

У такому випадку міркування завершено, як і в попередньому випадку.

1. *Якщо функція  інтегровна за Ріманом, а функцію  можна представити у вигляді інтеграла зі змінною верхнею межею інтегрування:*

, (7)

де  абсолютно інтегровна на проміжку , то інтеграл (5) існує.

Нехай , так, що  монотонно зростає. Якщо  інтегровна за власним змістом, і виходячи з цього, обмежена: , то для  маємо .

Таким чином, у цьому випадку  задовольняє умові Ліпшиця, та інтеграл існує в силу (2).

Припустимо тепер, що  інтегровна у невласному сенсі. Обмежимося випадком однієї особливої точки, скажімо . Перш за все, за довільно взятим  вибираємо  так, щоб було

, (8)

де  - загальне коливання функції  на розглядуваному нами проміжку.

Розіб’ємо проміжок  довільно на частини і складемо суму

.

Вона розкладається на дві суми , з яких перша відповідає проміжкам, що цілком містяться в проміжку , а друга – решті проміжків. Останні, скоріш за все, містяться в проміжку , якщо тільки ; тоді в силу (8),

.

З іншого боку, так як на проміжку  функція  інтегровна у власному сенсі, то за доведеним, при достатньо малому  і сума  стане меншою за . Звідси слідує (4), що і потрібно було довести.

У загальному випадку, коли функція  абсолютно інтегровна на проміжку **,** ми розглянемо функції

 ,

очевидно, невід’ємні і інтегровні на даному проміжку. Так як

,

то питання зводиться до вже розглянутого випадку.

ЗАУВАЖЕННЯ. Нехай функція  неперервна на проміжку  і має, виключаючи лише скінчене число точок, похідну , причому ця похідна інтегровна (у власному чи невласному змісті) від до ; тоді, як відомо, має місце формула (7):

.

Якщо  абсолютно інтегровна, то до функції  повністю справедливо все викладене в п. 3.[1;3]

# §3. Властивості інтегралу Стілтьєса

З визначення інтегралу Стілтьєса безпосередньо випливають такі його властивості:

1. ;
2. ;
3. ;
4.  .

При цьому у випадках 2, 3, 4 з існування інтегралів у правій частині випливає існування інтеграла у лівій частині. Далі маємо

1. ,

у припущенні, що  і існують всі три інтеграли.

Для доведення цієї формули достатньо включити точку *с* в число точок розбиття проміжку , при складанні суми Стілтьєса для інтегралу .

Перш за все, з існування інтеграла  уже випливає існування обох інтегралів  і .

Для своєрідного граничного процесу, за допомогою якого для стілтьєсової суми отримується інтеграл Стілтьєса, має місце принцип збіжності Больцано-Коші. Таким чином по заданому  враховуючи існування інтеграла  знайдеться таке , що будь-які дві суми  і , яким відповідають  і , різняться менш ніж на . Якщо при цьому у склад точок розбиття включити точку с, а точки розбиття, що припадають на проміжок , брати в обох випадках одними й тими самими, то різниця  зведеться до різниці  двох сум Стілтьєса, що належать вже проміжку , бо решта доданків взаємно скорочуються. Застосовуючи до проміжку  і обрахованим для нього стілтьєсовим сумам той же принцип збіжності, зробимо висновок про існування інтеграла . Аналогічним чином встановлюється і існування інтегралу . Але, важливо відмітити, що з існування обох інтегралів  і , взагалі кажучи, не випливає існування інтегралу . Щоб упевнитися в цьому, достатньо розглянути приклад. Нехай на проміжку  функції  і  задані наступними рівностями:

 

Легко побачити, що інтеграли



обидва існують і рівні 0, бо відповідні суми Стілтьєса всі рівні 0: для першого це випливає з того, що завжди =0, для другого – з постійності функції , завдяки чому =0.

У той же час інтеграл  не існує. Дійсно, розіб’ємо проміжок  так, щоб точка 0 не потрапила у склад точок розбиття, і складемо суму:

.

Якщо точка 0 потрапляє в проміжок , так, що , то в сумі  залишиться лише один -й доданок; решта будуть нулі, тому що  для . Отже,

.

В залежності від того, чи буде  або , виявиться  або , так що  границі не має

Вказана своєрідна умова пов’язана з наявністю розривів у точці  для обох функцій  і . [8]

**§4. Інтегрування за частинами**

Для інтегралів Стілтьєса має місце формула

–  (8)

в припущенні, що існує один з цих інтегралів; існування іншого звідси вже випливає. Ця формула носить назву формули інтегрування за частинами. Доведемо її.

Нехай існує інтеграл . Розклавши проміжок [а, b] на частини [*xi* , *xi+1*] (*i = 0, 1, ..., n — 1*), оберемо в цих частинах довільно по точці  таким чином, що 

Суму Стілтьєса для інтеграла 



можна представити у вигляді



Якщо додати або відняти зправа вираз  то  перепишеться так:



Вираз у фігурних дужках представляє собою стілтьесову суму для інтеграла (існування якого припущено!). Вона відповідає розбиттю проміжку [*а, b*] точками ділення  якщо в якості обраних з проміжків  точок узяти ***x****i*, а для проміжків , відповідно, ***а*** і ***b***. Якщо, як зазвичай, покласти  то тепер довжини всіх частинних проміжків не перевищать .

При  сума у квадратних дужках прямує до , з чого слідує, що існує границя і для , тобто інтеграл  і цей інтеграл визначається формулою (9). [8]

**§5. Зведення інтеграла Стілтьєса до інтегралу Рімана**

Нехай функція ***f(x)*** неперервна на проміжку [a, b], a ***g(x)*** монотонно зростає в цьому проміжку, і притому в суворому сенсі. Тоді, як показав Лебег (Н. Lebesgue), інтеграл Стілтьеса за допомогою підстановки  безпосередньо зводиться до інтегралу Рімана.

Доведемо тепер, що

 (10)

де останній інтеграл береться у звичайному сенсі, його існування забезпечено, так як функція *g(v),* а з нею і складна функція *f(g-1(v))* неперервні.

Для цього розкладемо проміжок [а, b] на частини за допомогою точок ділення

*a*=*x0*<*x1*<…<*xi*<*xi+1*<…<*xn*=*b*

и складемо стілтьесову суму



Якщо покласти *vi = g(xi) (i = 0, 1, . . ., n),* то будемо мати

*v0*<*v1*< ... <*vi*< *vi+1* < ... <*vn* = *V*.

Так як *хi* = *g-1 (vi)*, то



Цей вираз має вигляд ріманової суми для інтеграла



Маємо

 і



так що



Припустимо тепер  настільки малими, щоб коливання функції *f(x)* у всіх проміжках [*xі, хі+1*] були менше довільно наперед заданого числа > 0. Так як при , очевидно, , то одночасно і <.

В такому випадку

<

Цим доведено, що



звідки и слідує (10). [4;6]

# §6. Обчислення інтегралів Стілтьєса

Доведемо наступну теорему:

1. *Якщо функція* ***f(x)*** *інтегрована в сенсі Рімана на проміжку [a, b], a* ***g(x)*** *представлена інтегралом*

**

*де функція  абсолютно інтегровна в [а,b], то*

** (11)

Існування інтеграла Стілтьєса при зроблених припущеннях уже було доведено вище.

Залишається лише з’ясувати рівність (11).

Без зменшення загальності можна припустити, що функція  додатна.

Складемо суму Стілтьєса



Так як, з іншого боку, можна написати



то будемо мати



Очевидно, для  буде , де означає коливання функції **f(x)** на проміжку [*xі, xі+1*]. Звідси витікає така оцінка записаної вище різниці:



Нам відомо, що при  остання сума прямує до 0, з чого слідує, що

,

що і доводить формулу (11).

1. *При тих самих припущеннях стосовно функції* ***f(x)*** *припустимо, що функція* ***g(x)*** *неперервна на всьому проміжку [а, b] і має в ньому, за виключенням лише скінченої кількості точок, похідну* ***g'(x),*** *яка на [а, b] абсолютно інтегрована. Тоді*

** (12)

Звертаючись до випадків, коли функція ***g(x)*** є розривною розглянемо спочатку «стандартну» розривну функцію *р(х)*, яка визначається рівностями



Вона має розрив першого роду — стрибок — у точці ***х***= 0 зправа, причому величина стрибка *р(+0) – р(0))* дорівнює 1; в точці *х* =0 зліва і в решті точок функція *p(x)* неперервна. Функція *p(x – c)* буде мати такий самий розрив у точці *x=c* зправа; навпаки, *p(с – x)* буде мати подібний розрив у точці *x=c* зліва, причому величина стрибка дорівнює – 1.

Припустимо, що функція ***f(x)*** неперервна в точці *х = с*, і обчислимо інтеграл , де  (при  інтеграл рівний нулю).

Складемо суму Стілтьєса:

.

Нехай точка  потрапляє, скажімо в -ий проміжок, так що . Тоді , а при , очевидно . Таким чином, уся сума  зводиться до одного доданку . Нехай тепер . По неперервності . Виходячи з цього, існує (при )

 (13)

Аналогічно можна упевнитися в тому, що (при )

 (14)

(при  цей інтеграл перетворюється на нуль).

Тепер ми можемо довести дещо узагальнену на відміну від 2, а саме відмовимося від вимоги неперервності функції :

*3. Нехай функція f(x) на проміжку  неперервна,a g(x) має на цьому проміжку, виключаючи хіба лише скінчене число точок, похідну  яка абсолютно інтегровна на . При цьому нехай функція g(x) у скінченому числі точок* 

має розрив першого роду. Тоді існує інтеграл Стілтъєса, який виражається формулою



. (15)

Характерна тут наявність позаінтегральної суми, де фігурують скачки функції g(x) в точках  або  — односторонні. (Якщо на будь-якій з цих функцій стрибка немає, то відповідний доданок суми перетворюється на нуль).

Для спрощення запису введемо позначення для стрибків функції g(x) зправа и зліва:

 ,

 ;

очевидно, для , .

Складемо допоміжну функцію:

,

Яка як би вбирає у себе усі розриви функції g(x), так що різниця , як ми зараз встановимо, виявляється вже неперервною.

Для значень  відмінних від усіх , неперервність функції  не викликає сумнівів, бо для цих значень неперервні обидві функції  и . Доведемо тепер неперервність  у точці  зправа. Усі доданки суми , окрім члена , неперервну при  зправа, тому достатньо вивчити поведінку виразу . При  воно має значення ; але така ж і його границя при :

.

Аналогічно перевіряється ф неперервність функції  в точці  зліва.

Далі, якщо взяти точку х (відмінну від усіх ), в якій функція  має похідну, то поблизу цієї точки  зберігає постійне значення, виходячи з цього, у ній і функція  має похідну, причому .

Для неперервної функції , за попередньою теоремою, існує інтеграл Стілтьєса .

Так само легко обрахувати і інтеграл



.

Додаючи почленно ці дві рівності, ми і прийдемо до рівності (15); існування інтеграла Стілтьєса від  по функції  встановлюється попутно. [5]

# §7. Приклади обчислення інтеграла Стілтьєса

1) Обчислити за формулою (11) інтеграл:



Розв’язок, (а)

 і т.д.

2) Обчислити за формулою (15) інтеграли:

(а) , де 

(б) , де 

Розв’язок. (а) Функція  має стрибок 1 при и стрибок —2 при ; в решті точок . Тому 

(б) Стрибок 1 при  и  при  (значення функції  при  не впливає на результат); у решті точок g(x) = 0.

Маємо:



3) Обрахувати за формулою (15) інтеграли:

(а) , (б) , (в) ,

де 

Розв’язок. Функція  має скачки рівні 1, при  і . Похідна



Тому



Аналогічно,

 і 

3) Припустимо, що вздовж відрізку  вісі х розташовані маси, як скупчені в окремих точках, так и розподілені неперервно. Не роблячи між ними відмінностей, позначимо для  через  суму всіх мас, розташованих на проміжку ; більше того, покладемо =0. Очевидно,  — монотонно зростаюча функція. Поставимо собі задачею знайти статичний момент цих мас відносно початку координат.

Розіб’ємо проміжок  на частини точками



На відрізку  при  міститься, очевидно, маса. Так само на відрізку  міститься маса . Рахуючи масу в усіх випадках зосередженою, наприклад на правому кінці проміжку, отримаємо для шуканого статичного моменту наближений вираз



Коли всі  прямують до 0, то у границі прийдемо до точкового результату:

 (16)

Можна було б і тут, спочатку встановити «елементарний» статичний момент  що відповідає відрізку вісі від  до  а потім просумувати ці елементи.

Аналогічно для моменту інерції  тих самих мас відносно початку знайдемо формулу

 (17)

***Підкреслимо, що інтеграл Стілтъєса дав можливість об’єднати однією інтегральною формулою різнорідні випадки неперервно розподілених и зосереджених мас!***

Нехай неперервно розподілені маси мають лінійну щільність ; окрім них, них у точках  розташовані зосереджені маси . Тоді, виключаючи ці точки, функція  має похідну .

У кожній же точці  функція має стрибок, рівний саме масі ,зосередженій в цій точці.

Якщо тепер розкласти інтеграл (16) за формулою (15), то отримаємо



Придивившись до правої частини, у першому члені легко впізнати статичний момент неперервно розподілених мас, а в другому — статичний момент зосереджених мас. Аналогічний результат одержимо також для інтеграла (17).

0 

 

 

Рис.1

4) Розглянемо інше питання, в якому інтеграл Стілтьєса грає таку ж роль, як і у вправі 3). Припустимо, що на балку (рис. 1), що спирається на дві опори, окрім неперервно розподіленого навантаження діють і зосереджені сили. Розташуємо вісь х вздовж вісі балки, а вісь у вертикально донизу (див. рис. 1). Не будемо робити різниці між діючими силами, позначимо для  через суму усіх сил, що прикладені на відрізку  балки, включаючи і реакції опір; далі, нехай . Силу  називають перерізувальним зусиллям у перерізі  балки. При цьому сили, направлені донизу, будемо вважати додатними, а вгору — від’ємними.

Поставимо завдання визначити так званий згинальний момент М у довільному перерізі | балки. Під цим розуміють суму моментів усіх сил, що діють на праву (або на ліву) частину балки, відносно цього перерізу. При цьому, коли мова іде про праву частину балки, момент вважають додатнім, якщо він обертає цю частину за годинниковою стрілкою (для лівої частини — обернене правило).

Так як на елементі  скажімо, правої частини балки прикладена силу  що створює елементарний момент 

то, «сумуючи», отримаємо



Аналогічно, виходячи з лівої частини балки, можна було б отримати (враховуючи зміну додатного напрямку для відліку моментів)

 (18)

Легко безпосередньо побачити, що обидва вирази вигинального моменту дійсно тотожні. Їх рівність рівносильна умові яка є наслідком з умов рівноваги що виражає рівність нулю суми всіх сил і суми моментів (відносно початку) всіх сил, що діють на балку.

Якщо інтенсивність неперервно розподіленого навантаження позначити через  то, виключаючи точки, де прикладені зосереджені сили, буде



Нехай зосереджені сили  прикладені в точках . Тоді, очевидно, перерізаюче зусилля саме в цих точках має скачки, відповідно рівні . Далі, застосовуючи, наприклад, до інтегралу (18) формулу (15), отримаємо



У двох доданках правої частини легко впізнати моменти, спричинені нарізно неперервним навантаженням і зосередженими силами: *інтеграл Стілтъєса охоплює їх єдиною інтегральною формулою.*

5) Формула (15) може бути корисна і для обрахунку звичайних інтегралів (у сенсі Рімана). Проілюструємо це наступним загальним прикладом.

Нехай  - — «кусково-поліноміальна» функція на проміжку ; це означає, що проміжок розкладається на скінчене число частин точками



так, що в кожній з частин функція  представляється поліномом не вищим -го степеня. Замінивши значення функції  і всіх її похідних у точках  та  нулями, позначимо через  величину стрибка -ї похідної  в -ій точці 

Нехай, далі,  — будь-яка неперервна функція; покладемо

 і, взагалі, 

Тоді має місце наступна формула:



Дійсно, послідовно знаходимо

;

подвійна підстановка зникає, а інтеграл

;

аналогічно,



і т.д.

7) Встановимо, за допомогою формули (11) корисне узагальнення формули інтегрування за частинами для звичайних інтегралів. Саме якщо  і  обидві абсолютно інтегровні на проміжку , a U() і V() визначаються інтегральними формулами:





то справедлива формула

 (19)

Для доведення, за формулою (11) замінимо інтеграл зліва інтегралом Стілтьєса и проінтегруємо за частинами:



залишається ще раз застосувати формулу (11) до останнього інтегралу, щоб прийти до (19)

Тут функції  грають як би роль похідних від функцій не будучи ними насправді. При неперервності функцій  і  ми повертаємося до звичайної формули інтегрування за частинами, бо тоді

, . [2;7]

**§8. Граничний перехід під знаком інтеграла Стілтьєса**

**Теорема 1***. Нехай функції   неперервні на проміжку  і при  рівномірно прямують до граничної функції  [очевидно, також неперервній], a  — функція з обмеженою зміною. Тоді *

Доведення. По заданому  знайдеться таке , що при  буде для всіх 



Тоді, в силу для 



що, враховуючи довільність , і доводить теорему.

Теорема 2. *Нехай тепер функція  неперервна а проміжку , а функції   — всі з обмеженою зміною на цьому проміжку. Якщо повні зміни цих функцій в їх сукупності обмежені*:

 

*і  при  прямують до граничної функції*

, *то*



Доведення. Перш за все впевнимося у тому, що гранична функція  сама також буде мати обмежену зміну. Розкладемо проміжок  довільним чином на частини точками , будемо мати (при будь-якому ) 

Переходячи границі тут при , отримаємо  звідки і 

Складемо суми Стілтьєса , 

Якщо припустити, що проміжок  при цьому розкладений на такі маленькі частини, що коливання функції  у кожній з них буде вже менше довільного наперед взятого числа , то, при всіх 

,  (27)

З іншого боку, якщо розбиття, обране під вказаною умовою фіксувати, то очевидно  а при , так що знайдеться таке , що для  буде

. (27)

Тоді для тих самих значень  будемо мати, в силу (27) і (28),



звідки, враховуючи довільність, і випливає необхідний висновок. [1;7]

# Висновки

У даній роботі розглянуто означення і основні властивості інтеграла Стілтьєса, його зв’язок, особливості і відмінності від інших визначених інтегралів.

В ході виконання курсової роботи були з’ясовані загальні умови існування інтегралу Стілтьєса та 3 класи випадків його існування, а також вивчено порядок зведення інтегралу Стілтьєса до інтегралу Рімана.

У даній роботі досліджено 5 основних властивостей, подано метод граничного переходу під знаком інтегралу Стілтьєса та формула, за якою здійснюється інтегрування за частинами цього інтегралу.

Були розглянуті приклади застосування інтеграла Стілтьєса для розв’язку різних класів задач, зокрема, можливість об’єднання однією інтегральною формулою різнорідних випадків неперервно розподілених и зосереджених мас за допомогою інтеграла Стілтъєса.

Отже, слід зазначити, що інтеграл Стілтьєса має специфічні властивості і є не тільки узагальненням інтегралу Рімана, але й самостійним інструментом для розв’язку певного класу задач.

# Список використаних джерел

1. Градштейн и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Наука, 1963 – 312с.
2. Давидов М.О. Курс математчного анализу. Ч. 1. – К.:Вища школа, 1990. – 350с.
3. Канторович Л.В., Акитов Г.Л. Функциональный аналіз. – М.: ИЛ, 1961 – 321с.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.2. - М.: Высшая школа, 1965. – 369с
5. Никольский С.М. Курс математического анализа - М.: Физматгиз, 2001 – 398с.
6. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа: учебное поссобие. – М.: Прсвещение, 1968 - 307с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики (В 5-ти т.) том 5. - М.-Л. АН СССР, 1959 – 452с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (В 3-х томах) т.3. М.: Физматгиз, 1963 - 662с.

1. Томас Іоанес Стілтьєс (нідерл. Thomas Joannes Stieltjes, 29.12.1856, — 31.12.1894 Тулуза) — нідерландський математик.

   Запрпонував у 1894 р. узагальнення визначеного інтегралу (Інтеграл Рімана-Стілтьеса). Член-кореспондент Петербурзької Академії наук (1894). [↑](#footnote-ref-1)