***Реферат на тему:***

**Диференціальні рівняння першого порядку,**

**розвязані відносно похідної**

**1. Поняття диференціального рівняння, його порядок.**

***Означення 2.1.***  Рівняння вигляду

 (2.1)

називається диференціальним рівнянням (наявність похідних тут обовязкова).

***Означення 2.2.*** Найбільший порядок похідної, яка входить в диференціальне рівняння (2.1) називається порядком диференціального рівняння.

***Означення 2.3.*** Функція  називається розвязком (або інтегралом) диференціального рівняння (2.1), якщо вона *n*-раз неперервно диференційовна на деякому інтервалі  і задовільняє диференціальному рівнянню (2.1) .

***Приклад 2.1.***  - диференціальне рівняння другого порядку.

При  диференціальне рівняння (2.1) називається диференціальним рівнянням першого порядку і позначається

. (2.2)

Диференціальне рівняння (2.2) називається розвязаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

. (2.3)

Припускаємо, що  однозначна і неперервна в деякій області *D* змінних *x,y.* Цю область називають областю визначення диференціального рівняння (2.3).

Якщо в деякій області функція  перетворюється в , то розглядають диференціальне рівняння

.

Множину таких точок, а також тих, в яких  не визначена, але може бути довизначена до неперервності, будемо приєднувати до області визначення диференціального рівняння (2.3).

Поряд з (2.3) будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціалах

 (2.4)

або в більш загальному виді

 (2.5)

Інколи розглядатимемо диференціальне рівняння в симетричній формі

 (2.6)

Функції  будемо вважати неперервними в деякій області.

***Означення 2.4.*** Розвязком диференціального рівняння (2.3) в інтервалі *І* назвемо функцію , визначену і неперервно диференційовну на *І*, яка не виходить з області означення функції  і яка перетворює диференціальне рівняння (2.3) в тотожність , тобто



Розвязок  називається розвязком, записаним в явній формі (вигляді).

Процес знаходження розвязку диференціального рівняння називається інтегруванням.

Не завжди можна отримати розвязок в явному вигляді.

***Означення 2.5.*** Будемо говорити, що рівняння

 (2.7)

визначає в неявній формі розвязок диференціального рівняння (2.3), якщо воно визначає , яка є розвязком диференціального рівняння (2.3).

При цьому на розвязках диференціального рівняння (2.3) виконується

. (2.8)

***Означення 2.6*** Будемо говорити, що співвідношення

 (1.9)

визначають розвязок диференціального рівняння (2.3) в параметричній формі на інтервалі , якщо

. (2.10)

1. **Задача Коші.**

Розглянемо диференціальне рівняння (2.3). Задача Коші заключається в тому, щоб серед всіх розвязків диференціального рівняння (2.3) знайти такий , який проходить через задану точку

 (2.11)

Тут  - початкове значення незалежної змінної,  - функції.

Розвязати задачу Коші з геометричної точки зору означає (рис. 2.1) : знайти серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння (2.3) ту, яка проходить через задану точку .

х

у

Х0

М(х0 , у0)

У0

Рис. 2.1.

***Означення 2.7.*** Будемо говорити, що задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний розвязок, якщо  число *h>0*, що на відрізку  визначений розвязок  такий, що  і не існує другого розвязку, визначеного в цьому ж інтервалі  і не співпадаючого з розвязком  хоча б в одній точці інтервалу , відмінній від точки .

Якщо задача Коші (2.3), (2.11) має не один розвязок або ж зовсім його не має, то говорять, що в точці  порушується єдиність розвязку задачі Коші.

При постановці задачі Коші ми припускаємо, що  - обмежені числа, а диференціальне рівняння (2.3) в точці  задає деякий напрямок поля, який не паралельний осі ОУ.

Якщо права частина диференціального рівняння (2.3) в точці М приймає нескінченне значення, необхідно розглянути диференціальне рівняння (2.3) і знайти розвязок  (рис. 2.2)

у

х

Х0

У0

М

# Рис. 2.2

Якщо ж в точці М права частина диференціального рівняння (2.3) має невизначеність, наприклад, типу , тоді звичайна постановка задачі Коші не має смислу, так як через точку М не проходить жодна інтегральна крива. В цьому випадку задача Коші ставиться так : знайти розвязок  (або ), який примикає до точки М.

В деяких випадках треба шукати розвязок , який задовольняє умовам  при  при  і т.д.

***Теорема Пікара.*** (без доведення) Припустимо, що функція  в диференціальному рівнянні (2.3) визначена і неперервна в обмеженій області



і, отже, вона є обмеженою

 (2.12)

функція  має обмежену частинну похідну по *у* на *D*

. (2.13)

При цих умовах задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний неперервно-диференційовний розвязок в інтервалі

 (2.14

***Зауваження 2.1.*** В сформульованій теоремі умову (2.13) можна послабити (замінити) на те, щоб функція  по змінній *у* задовольняла умові Ліпшіца, тобто

. (2.15)

Тут *L>0* - найменша константа яка задовольняє (2.15) і називається константою Ліпшіца .

***Теорема Пеано.*** (про існування розвязку). Якщо функція  є неперервною на *D*, то через кожну точку  проходить, по крайній мірі, одна інтегральна крива.

Якщо функція диференційовна і задовольняє (2.13), то вона задовольняє умові Ліпшіца, з *L=K*.

Функція може зодовольняти умові Ліпшіца, але не бути диференційовною і, отже, не буде задовольняти (2.13). Наприклад, .

1. **Поняття загального розвязку, форми його запису.**

На прикладах можна переконатися, що диференціальне рівняння (2.3) має нескінченну множину розвязків, яка залежить від деякого параметру *с*

 (2.16)

Це сімейство і називається загальним розвязком диференціального рівняння (2.3). При кожному *с*  (2.16) дає інтегральну криву.

Для розвязування задачі Коші (2.3), (2.11) параметр *с* можна знайти з рівняння .

Дамо точне визначення загального розвязку. Припустимо, що на *D* виконуються умови теореми Пікара.

***Означення 2.8.*** Функцію

 (2.17)

визначену в деякій області змінних *х* і *с,* і яка має неперервну частинну похідну по *х* будемо називати загальним розвязком диференціального рівняння (2.3) в області *D,* якщо рівняння (2.17) можна розв′язати відносно *с* в області *D*

 (2.18)

і функція (2.17) є розвязком диференціального рівняння (2.3) при всіх значеннях довільної сталої *с*, які визначаються формулою (2.18) коли .

Суть означення 2.8 в наступному. Припустимо, що задано сімейство кривих *F* на області *D*, яке залежить від одного параметра *С*. Якщо будь-яка крива із *F* є інтегральною кривою диференціального рівняння (2.3) і всі криві із *F* в сукупності покривають *D*, то *F* є розвязком диференціального рівняння (2.3) в області *D* (рис. 2.3).

D

у

х

# Рис. 2.3

Для розвязування задачі Коші константу *С*

можна знайти згідно

. (2.18)

Інколи в формулі (2.17) роль *С* грає *у0*, тоді говорять, що розвязок представлений у формі Коші

. (2.19)

***Приклад 2.2.*** Знайти розвязок диференціального рівняння



у формі Коші. Загальний розвязок  В указаній області виконуються умови теореми Пікара. Звідки

 - розвязок в формі Коші.

В більшості випадків при інтегруванні диференціального рівняння (2.3) ми отримуємо загальний розвязок в неявній формі

 **(**або , (2.20)

який називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2.3).

***Означення 2.9.*** Будемо називати співвідношення (2.20) загальним розвязком в неявній формі або загальним інтегралом в області *D*, якщо співвідношенням (2.20) визначається загальний розвязок (2.17) диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

З означення випливає, що (2.18) - загальний інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

Інколи при інтегруванні отримуємо сімейство інтегральних кривих, залежне від *С*, в параметричній формі.

 (2.21)

Таке сімейство інтегральних кривих будемо називати загальним розвязком диференціального рівняння (2.3) в параметричній формі.

Якщо в (2.21) виключити *t*, то отримаємо загальний розвязок в неявній або явній формі.

1. **Частинні і особливі розвязки. Знаходження кривих, підозрілих на особливість розвязку, по диференціальному рівнянню**

***Означення 2.10.*** Розвязок, який складається з точок єдиності розвязку задачі Коші називається частинним і його можна отримати з загального при фіксованому *С*.

Розвязок задачі Коші, який задовольняє теоремі Пікара, є частинний розвязок.

***Означення 2.11.*** Розвязок, в кожній точці якого порушується єдиність розвязку задачі Коші, будемо називати особливим.

Геометрично особливому розвязку відповідають інтегральні криві, які не містяться в загальному розвязку. Тому особливий розвязок не може існувати всередині області *D* існування загального розвязку. Його не можна отримати з формули загального розвязку ні при яких числових значеннях *С*, включаючи . Його можна отримати з загального розвязку лиш при .

Існують ні частинні ні особливі розвязки. Їх можна отримати шляхом склеювання кусків частинних і особливих розвязків.

y

N

N1

M

M1

x

# Рис. 2.4

***Приклад 2.3.*** Знайти особливий розвязок диференціального рівняння

 ,

 .

Отримали загальний розвязок в області , в якій виконуються умови теореми Пікара. Але розвязком буде , який ми отримуємо при . Він не міститься в загальному розвязку при жодному фіксованому *С*. Отже, згідно означення  - особливий розвязок.

Якщо  неперервна на *D*, то умови підозрілі на особливий розвязок : необмеженість похідної . Знайшовши таку криву в подальшому треба переконатися :

1. вона являється інтегральною кривою;
2. перевірити, що в кожній її точці порушується єдиність розвязку.

В прикладі 2.2.  при . Поскільки  - розвязок і через нього проходять інтегральні криві з загального розвязку, то  - особливий розвязок.

***Приклад 2.4.*** Розглянемо диференціальне рівняння



при . Але  не є розвязком диференціального рівняння, тому і не є особливим розвязком.

Припустимо, що диференціальне рівняння має однопараметричне сімейство інтегральних кривих . Тоді, якщо це сімейство має обвідну, тобто лінію, яка в кожній точці дотикається сімейства і ні на якому участку не співпадає ні з одною кривою сімейства. Ця обвідна і буде особливим розвязком. Дійсно через довільну її точку проходить по крайній мірі два розвязки : обвідна і сам розвязок.

1. **Два означення інтегралу. Теореми про загальний вигляд інтегралу та залежність двох інтегралів одного диференціального рівняння.**

Нехай

 (2.22)

загальний розвязок загального диференціального рівняння (2.3) в області *D*, в якій виконуються умови теореми Пікара. Тоді на *D* рівняння (2.22) можна розвязати відносно *С*

 . (2.23)

Функція  приймає постійні значення на довільному частинному розвязку з *D*, причому значення постійної визначається частинним розвязком

. (2.24)

***Означення 2.12.*** (перше означення інтегралу) Функція , визначена на *D* і яка не зводиться до константи, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*, якщо на довільному частинному розвязку з *D*, ця функція приймає постійні значення.

Припустимо, що  - диференційовна функція. Тоді на довільному частинному розвязку

 (2.25)

або

 (2.26)

При цьому  на *D* так як в противному . А це означає, що поле диференціального рівняння (2.3) в відповідній точці не задано.

***Означення 2.13.*** (друге означення інтегралу). Функція , визначена і неперервна з частинними похідними в області *D* і така, що  в області *D*, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*, якщо повний її диференціал, взятий в силу диференціального рівняння (2.3), тотожньо дорівнює нулю в області *D*.

З (2.26) випливає, що

 (2.27)

Функція, яка є інтегралом в смислі означення 2.12 буде інтегралом і в смислі означення 2.13. Навпаки не завжди так.

Якщо диференціальне рівняння (2.3) має один інтеграл, то воно має безліч інтегралів.

***Теорема 2.1.*** (про загальний вигляд інтегралу) Якщо  інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області *D* і функція  диференційовна в *D*, а  - довільна функція визначена і неперервно-диференційовна в області зміни функції  коли , то

 (2.28)

є інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

***Доведення.***

 ,

причому  в області *D*. Маємо

 (2.29)

З (2.29) випливає, що  - інтеграл диференціального рівняння (2.3) згідно означення.

***Теорема 2.2.*** (про залежність двох інтегралів) Нехай  два інтеграли диференціального рівняння (2.3). Тоді існує неперервно диференційовна функція *F*, що

. (2.30)

***Доведення.*** Поскільки  інтеграли, то

 (2.31)

З (2.31) випливає, що

. (2.32)

Формально (2.32) можна отримати визначаючи *dy* з одного рівняння системи (2.31) і підставляючи в друге рівняння. З функціонального аналізу відомо, що з умови (2.32) витікає (2.30).