ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА - раздел векторного исчисления в котором изучаются простейшие операции над (свободными) векторами. К числу операций относятся линейные операции над векторами: операция сложения векторов и умножения вектора на число.

Суммой a+b векторов a и b называют вектор , проведенный из начала a к концу b , если конец a и начало b совмещены. Операция сложения векторов обладает свойствами:

a+b=b+a (коммутативность)

(а+b)\*с=а\*(b+с) (ассоциативность)

a + 0=a (наличие нулевого элемента )

a+(-a)=0 (наличие противоположного элемента),

где 0 - нулевой вектор, - a есть вектор, противоположный вектору а . Разностью a-b векторов a и b называют вектор x такой, что x+b=a.

Произведением l x вектора а на число l в случае l № 0 , а № О называют вектор, модуль которого равен | l ||a| и который направлен в ту же сторону, что и вектор a , если l >0, и в противоположную, если l <0 . Если l =0 или (и) a =0, то l a=0 . Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

l \*(a+b)= l \*a+ l \*b (дистрибутивность относительно сложения векторов)

( l +u)\*a= l \*a+u\*a (дистрибутивность относительно сложения чисел)

l \*(u\*a)=( l \*u)\*a (ассоциативность)

1\*a=a (умножение на единицу)

Множество всех векторов пространства с введенными в нем операциями сложения и умножения на число образует векторное пространство (линейное пространство).

В Векторной алгебре важное значение имеет понятие линейной зависимости векторов. Векторы а, b, … , с называются линейно зависимыми векторами, если существуют числа a , b ,…, g из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что справедливо равенство:

a a+ b b+… g c=0. (1)

Для линейной зависимости двух векторов необходима и достаточна их коллинеарность, для линейной зависимости трех векторов необходима и достаточна их компланарность. Если один из векторов а, b, ...,c нулевой, то они линейно зависимы. Векторы a,b, ..,с называются линейно независимыми, если из равенства (1) следует, что числа a , b ,…, g равны нулю. На плоскости существует не более двух, а в трехмерном пространстве не более трех линейно независимых векторов.

Совокупность трех (двух) линейно независимых векторов e 1 ,e 2 ,e 3 трехмерного пространства (плоскости), взятых в определенном порядке, образует базис. Любой вектор а единственным образом представляется в виде суммы:

a=a 1 e 1 +a 2 e 2 +a 3 e 3 .

Числа a 1 ,a 2 ,a 3 называют координатами (компонентами) вектора а в данном базисе и пишут a={a 1 ,a 2 ,a 3 } .

Два вектора a={a 1 ,a 2 ,a 3 } и b={b 1 ,b 2 ,b 3 } равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов a={a 1 ,a 2 ,a 3 } и b={b 1 ,b 2 ,b 3 } ,b № 0, является пропорциональность их соответствующих координат: a 1 = l b 1 ,a 2 = l b 2 ,a 3 = l b 3 . Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов a={a 1 ,a 2 ,a 3 } , b={b 1 ,b 2 ,b 3 } и c={c 1 ,c 2 ,c 3 } является равенство :

| a 1 a 2 a 3 |

| b 1 b 2 b 3 | = 0

| c 1 c 2 c 3 |

Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над координатами. Координаты суммы векторов a={a 1 ,a 2 ,a 3 } и b={b 1 ,b 2 ,b 3 } равны суммам соответствующих координат: a+b={a 1 +b 1 ,a 2 +b 2 ,a 3 +b 3 } . Координаты произведения вектора а на число l равны произведениям координат а на l :

l а= { l а 1 , l a 2 , l a 3 }.

Скалярным произведением (а, b) ненулевых векторов а и b называют произведение их модулей на косинус угла j между ними:

(а, b) = | а |\*| b | cos j .

За j принимается угол между векторами, не превосходящий p . Если а=0 или b=0 , то скалярное произведение полагают равным нулю. Скалярное произведение обладает свойствами:

(a, b)= (b, а) (коммутативность),

(a,b+с)= (a,b) + (а,с) (дистрибутивность относительно сложения векторов),

l (a,b)=( l a,b) =(a, l 6) (сочетательность относительно умножения на число),

(a,b)=0, лишь если а=0 или (и) b=0 или a ^ b.

Для вычисления скалярных произведений векторов часто пользуются декартовыми прямоугольными координатами, т.е. координатами векторов в базисе, состоящем из единичных взаимно перпендикулярных векторов (ортов) i, j, k ( ортонормированный базис). Скалярное произведение векторов :

a={a 1 ,a 2 ,a 3 } и b={b 1 ,b 2 ,b 3 }

заданных в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле:

(a,b)=a 1 b 1 +a 2 b 2 +a 3 b 3

Косинус угла j между ненулевыми векторами a={a 1 ,a 2 ,a 3 } и b={b 1 ,b 2 ,b 3 }

может быть вычислен по формуле:

где и

Косинусы углов вектора a={a 1 ,a 2 ,a 3 } с векторами базиса i, j, k называют. направляющими косинусами вектора а:

, , .

Направляющие косинусы обладают следующим свойством:

cos 2 a +cos 2 b +cos 2 g =1

Осью называется прямая с лежащим на ней единичным вектором е-ортом, задающим положительное направление на прямой. Проекцией Пр. е а вектора a на ось называют направленный отрезок на оси, алгебраическое значение которого равно скалярному произведению вектора а на вектор е . Проекции обладают свойствами:

Пр. е (a+b)= Пр. е a+ Пр. е b (аддитивность),

Пр. е a = Пр. е l a (однородность).

Каждая координата вектора в ортонормированном базисе равна проекции этого вектора на ось, определяемую соответствующим вектором базиса.

В пространстве различают правые и левые тройки векторов. Тройка некомпланарных векторов а, b, с называется правой, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов a, b, с в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае a,b,c - левая тройка. Правая (левая) тройка векторов располагается так, как могут быть расположены соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки(см. рис). Все правые (или левые) тройки векторов называются одинаково ориентированными.

b b

c c

a a

правило левой руки правило правой руки

Ниже тройку векторов i,j,k следует считать правой .

Пусть на плоскости задано направление положительного вращения (от i к j ). Псевдоскалярным произведением aVb ненулевых векторов a и b называют произведение их модулей на синус угла j положительного вращения от a к k :

aVb=| a || b |\*sin j

Псевдоскалярное произведение нулевых векторов полагают равным нулю. Псевдоскалярное произведение обладает свойствами:

aVb=-bVa (антикоммутативность),

aV (b+c)=aVb+aVc (дистрибутивность относительно сложения векторов),

l (aVb)= l aVb (сочетательность относительно умножения на число),

aVb=0, лишь если а=0 или (и) b=0 или а и b коллинеарны.

Если в ортонормированном базисе векторы а и и имеют координаты {a 1 ,a 2 } {b 1 ,b 2 }, то :

aVb=a 1 b 1 -a 2 b 2.