***Пошукова робота на тему:***

Наближене обчислення означених інтегралів: формули прямокутників, трапецій, Сімпсона.

**План**

* Наближене обчислення означених інтегралів
* Формула прямокутників
* Формула трапецій
* Формула парабол (Сімпсона)

**Наближені методи обчислення інтегралів**

В усіх випадках, коли розглянуті раніше методи знаходження первісних, не приводять до мети внаслідок того, що інтеграл не виражається через елементарні функції, і особливо тоді, коли підінтегральна функція задана таблицею (або графіком), доводиться повертатися до означення інтеграла як границі інтегральної суми. На основі цього існує ряд методів наближеного обчислення визначених інтегралів. Тут будуть розглянуті деякі з методів – метод прямокутників, трапецій і Сімпсона як найпоширеніші і широко застосовуваний для програмування обчислень на ПК.

**1. Формули прямокутників**

            Нехай на відрізку  задана неперервна функція . Потрібно обчислити інтеграл



            Розіб’ємо відрізок  на  рівних частин точками довжина кожної з яких дорівнює  Через  позначимо значення функції  в точках  і складемо суми



 або



            Кожна з цих сум є інтегральною сумою для  на відрізку  і тому наближено виражають визначений інтеграл:



                           (9.8)



                                    (9.8/)



            Ці формули називаються *формулами прямокутників.* З рис.9.3 видно, що якщо додатна і зростаюча функція, то формула (9.8) виражає площу ступінчатої фігури, що складена із “ внутрішніх” прямокутників, а формула (9.8/) – площу фігури, що складена із “зовнішніх” прямокутників. Похибка при цьому буде тим меншою, чим більше число (тобто чим менший крок поділу ).



**2. Формула трапецій**

            Очевидно, що можна отримати більш точне значення інтеграла, якщо дану криву  замінити не ступінчатою лінією, як це мало місце у формулі прямокутників, а вписаною ломаною (рис.9.4). Тоді площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями  і  заміниться площами трапецій, обмежених зверху хордами Оскільки площа

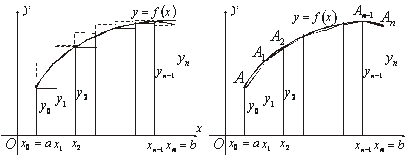


            Рис.9.3                                                    Рис.9.4

першої трапеції дорівнює другої -  і т.д.,



то



або

                   (9.9)



            Формула (9.9) називається *формулою трапецій*. Число  вибирається довільним, але чим більшим це число буде, а значить, крок  меншим, тим з більшою точністю сума в правій частині наближеної рівності (9.9) буде давати значення інтеграла.



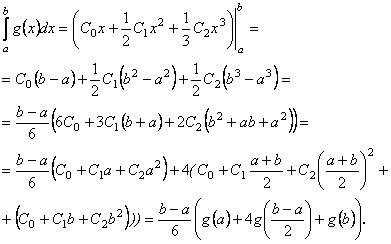
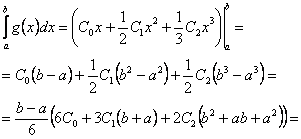
**3. Формула парабол (Сімпсона)**

Метод Сімпсона найпоширеніший і широко застосовний для програмування. Його суть полягає в наближенні підінтегральної функції відрізками парабол.

 Отже, розглянемо спочатку інтеграл , де  - парабола;  - деякі параметри (або числа).



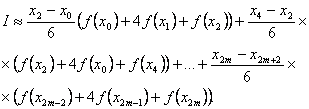
Тоді



Нехай тепер маємо інтеграл , де  -  неперервана на інтервалі  функція. Якщо інтервал розбити на  рівних частинок точками , то заданий інтеграл  можна записати так:



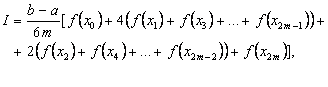
Якщо на кожному з інтегралів для проміжків  функцію замінимо параболами , що проходять через точки  ,то одержимо



Через те, що , формула матиме вигляд:



 або



                                            (9.10)



            Формула (9.10) називається *формулою* *парабол або Сімпсона.*       Доведено, що похибка обчислень   за формулою Сімпсона  є такою:



           (9.11)



Проте цією оцінкою похибки можна користуватись, якщо  є хоча б чотири рази диференційованою. Але якщо  навіть чотири рази диференційована, то часто оцінка четвертої похідної  може виявитись досить важкою. Тому на практиці часто користуються таким методом: обчислюють інтеграл, розділяючи інтервал, визначений границями інтегрування, один раз на рівних частин, а другий раз на  частин. Якщо одержані двоє значень інтеграла мало відрізняються, то результат можна вважати прийнятним. Порівнюючи їх можна оцінити і точність обчислень.



Приклад. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл



Р о з в ’ я з о к.За формулою (9.10) маємо:

при                  при



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | -0,5 | 0,0000 |  | -0,5 | 0,00000 |  | 0,05 | 0,0371 |
|  | -0,4 | -0,1203 |  | -0,45 | -0,0946 |  | 0,10 | 0,0772 |
|  | -0,3 | -0,1303 |  | -0,40 | -0,1203 |  | 0,15 | 0,1200 |
|  | -0,2 | -0,1081 |  | -0,35 | -0,1304 |  | 0,20 | 0,1652 |
|  | -0,1 | -0,630 |  | -0,30 | -0,1303 |  | 0,25 | 0,2122 |
|  | 0 | 0,0000 |  | -0,25 | -0,1204 |  | 0,30 | 0,2607 |
|  | 0,1 | 0,0772 |  | -0,20 | -0,1081 |  | 0,35 | 0,3103 |
|  | 0,2 | 0,1652 |  | -0,15 | -0,0881 |  | 0,40 | 0,3610 |
|  | 0,3 | 0,2607 |  | -0,10 | -0,0630 |  | 0,45 | 0,4121 |
|  | 0,4 | 0,36098 |  | -0,05 | -0,0335 |  | 0,50 | 0,4637 |
|  | 0,5 | 0,46365 |  | 0,00 | 0,0000 |  |  |  |

 Отже,тому  Формулою (9.10) для оцінки похибки скористатися неможливо, бо вже перша похідна підінтегральної функції при  перетворюється на нескінченність.

