***Пошукова робота на тему:***

*Диференціальні рівняння першого порядку (з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, Бернуллі).*

**План**

* Рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними
* Однорідні диференціальні рівняння першого порядку і рівняння, що зводяться до однорідних
* Лінійні диференціальні рівняння першого порядку
* Рівняння Бернуллі

**12.2. Рівняння з відокремленими**

**й відокремлюваними змінними**

            Якщо в диференціальному рівнянні першого порядку

                                                                     (12.1)



праву частину можна подати у вигляді



то  (за умови, що )  це рівняння можна записати так:



                                                             (12.2)



            Розглядаючи цю рівність як рівність двох диференціалів та інтегруючи зліва за , а справа за , отримаємо



                                                   (12.3)



            Це співвідношення є загальним інтегралом рівняння (12.1).

Диференціальне рівняння першого порядку типу (12.2), в якому при диференціалах  та  стоять відповідно функції, залежні тільки від  чи тільки від , називається диференціальним рівнянням *з* *відокремленими змінними*.



            Диференціальне рівняння вигляду

                            (12.4)



   називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

            Справді, якщо , то змінні відокремлюються діленням обох частин рівняння (12.4) на . Маємо



і, отже, загальний інтеграл рівняння, за аналогією з (12.2), має вигляд

.



            \Приклад 1.  Нехай  осіб зацікавлені в одержані інформації про новини технології у деякій галузі знань. Нехай в момент часу  інформація відома  особам. Для прискорення поширення інформації в момент часу  було дано оголошення (наприклад, по радіо). Далі інформація поширюється при спілкуванні людей між собою. Можна вважати, що після оголошення швидкість зміни кількості  тих, хто знає про технологічні новини, пропорційна як числу  тих, хто знає, так і кількості



тих, хто не знає. Припускаючи, що в момент часу   про новину дізналося  чоловік, приходимо до диференціального рівняння



                                                                (12.5)



з початковою умовою ( - коефіцієнт пропорціональності).



            Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Подамо його у вигляді

.



            Загальний інтеграл рівняння

                                                      (12.6)



            Знайдемо інтеграл у лівій частині рівності (12.6):



(Зауважимо, що ).  Загальний інтеграл (12.6) має форму



                                               .



            Звідси знаходимо загальний розв’язок :



                                                     (12.7)



            Для отримання розв’язку задачі Коші покладемо в рівності (12.7)   та визначимо довільну сталу (у даному



прикладі зручно шукати не , а  ) . Маємо , звідки

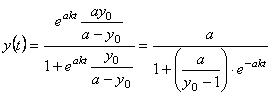


                                                                      (12.8)



            Підставимо вираз (12.8) у загальний розв’язок (12.7) і спростимо результат. Отримаємо шуканий частинний розв’язок:

.                (12.9)



            Його графіком є так звана логістична крива (рис.12.1).

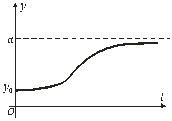


                                                    Рис.12.1

            Приклад 2 .  Нехай відомо, що швидкість хімічної реакції, яка перетворює речовину  на речовину , пропорційна добуткові концентрації цих речовин.



            Потрібно скласти диференціальне рівняння залежності об’єму  речовини від часу .



            Нехай об’єм речовини , що бере участь в реакції, дорівнює . Тоді загальний об’єм  .  Приріст у разі переходу речовини  в речовину має вигляд: , а швидкість реакції буде . Згідно з умовою



                                                            (12.10)



(коефіцієнт пропорційності), оскільки  та  - концентрації речовин  та  Враховуючи, що  рівняння (12.10) запишемо у вигляді



або

                                                    (12.11)



де .



            Цікаво відзначити, що рівняння (12.11) збігалося з рівнянням (12.5). Вперше таке рівняння використано у 1845 р. і названо як рівняння Ферхольста - Перла, застосовувалось воно для опису динаміки чисельності популяції в біології. Зауважимо, що такий самий вигляд мають рівняння інших процесів – наприклад, попиту на сезонні масові послуги на підприємствах побутового обслуговування, а також випаровування вологи з пористої речовини тощо.

            Розглянемо диференціальне рівняння виду . Виявляється, що це рівняння також описує  зовсім різні явища, процеси: при   отримуємо закон органічного росту, при  - рівняння процесу радіоактивного розпаду, залежності атмосферного тиску від висоти, процесу розряду конденсатора через опір й ін.



**12.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку і рівняння, що зводяться до однорідних**

            Рівняння першого порядку



називається *однорідним*  відносно   та , якщо для будь-якого справедлива тотожність



                                            .



            Приклад 1.    Рівняння   є однорідним, бо



                   .



            Однорідні диференціальні рівняння першого порядку зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки  Тоді   (тут покладено ). Змінні відокремлюються, оскільки після підстановки  в рівняння дістанемо



                                   ,



звідки

                                   .



            Інтегруючи це рівняння й повертаючись від змінної  до змінної , отримуємо загальний розв’язок однорідного рівняння.



            Прикладі 2.  Розв’язати рівняння .



            Р о з в ‘ я з о к. Це рівняння однорідне.     Виконаємо у цьому рівнянні   заміну залежної змінної Тоді



                    .



 Відокремлюючи змінні, одержуємо: ,   звідки



            .



            Отже, загальний розв’язок  рівняння має вигляд .



            Приклад 3. Покажемо, як розв’язується  рівняння, наведене в прикладі 3, за допомогою полярних координат.

            Перейдемо до нових змінних   та   за формулами



                        .



            Звідси



            Отже,

                        .



Права частина рівняння у нових координатах набуває вигляду



            Прирівнюючи праву і ліву частини рівняння, дістанемо

                           .



            На основі властивості пропорції позбудемося дробів:



            Спрощуючи це рівняння, отримаємо

                        .



            Відокремлюємо змінні

                                   .



            Інтегруємо

                                  .



(довільну сталу позначили як ) . Звідси  .



            Повернемось до старих змінних  та  й спростимо вираз. Отримаємо шуканий загальний інтеграл



або  .



            Зауваження.  До однорідних рівнянь зводяться диференціальні рівняння вигляду

                                                            (12.12)



            1. У разі, коли , слід виконати заміну змінних, де і   - сталі, підібрані таким чином, щоб рівняння (12.12) перетворилося на однорідне рівняння вигляду



                                    .



            Оскільки  та ,



сталі   і   слід підібрати так, щоб виконувались рівняння



            Ця система має єдиний розв’язок (згідно з умовою  ).



            2. Якщо , то , оскільки , та . В цьому разі рівняння (12.12) подамо у вигляді



                           .                            (12.13)



            Якщо в цьому рівнянні виконати заміну змінної за формулою , то рівняння (12.13) перетвориться у диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, маємо   і , отже, .



            Перейшовши до нової змінної у рівнянні (12.13), одержимо рівняння

                                            ,



у якому змінні легко відокремлюються.

            Приклад 4.   Розв’язати рівняння

.



Р о з в ‘ я з о к. Це - диференціальне рівняння вигляду (12.13). Перевіримо, чи виконується для нього нерівність . Отже, в цьому рівнянні слід виконати заміну змінних  та  за формулами . Підставимо нові змінні у вихідне рівняння:



            .



Для визначення  і  отримаємо алгебраїчну систему двох лінійних рівнянь



головний визначник якої дорівнює   і, отже, система має єдиний розв’язок:, . Це дозволяє виконати заміну змінних і:             ,



в результаті якої отримуємо однорідне рівняння . Виконаємо в цьому рівнянні заміну змінної  за формулою . Маємо .



Відокремлюємо змінні  та :



                        .



            Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд



або

.

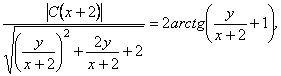


Враховуючи виконані заміни змінних, маємо:

.



Отже, загальний інтеграл вихідного рівняння



або, після спрощень,

            .



**12.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку**

*Лінійними диференціальними рівняннями першого порядку* називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної:

                                                        (12.14)



де  - задані неперервні функції від .



            Якщо, зокрема, , то рівняння



                                                               (12.15)



називається лінійним *однорідним* (або без правої частини), а рівняння (12.14), в якому - *неоднорідним*.



Однорідне рівняння (12.15) – це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні:

                                            .



            Загальний інтеграл рівняння

                                         ,



а загальний розв’язок однорідного рівняння (12.15)

                                                                (12.16)



            Щоб відшукати загальний розв’язок рівняння (12.14), використаємо так званий метод варіації довільної сталої Лагранжа. Суть його полягає в тому, що розв’язок рівняння (12.14) шукатимемо у вигляді, аналогічному (12.16), але вважатимемо у цій формулі  не сталою, а невідомою функцією від :



                                                          (12.17)



Підставимо (12.17) у рівняння (12.14):

,



або



З останнього рівняння знаходимо :



                                ,                   (12.18)



де - довільна стала. Отже враховуючи (12.18), загальний розв’язок (12.17) рівняння (12.14) набуває вигляду



                                          (12.19)



            Зауваження.  Метод варіації довільної сталої для рівняння (12.14) можна реалізувати на практиці таким чином.

            Розв’язок рівняння (12.14) шукаємо у вигляді добутку двох невідомих функцій :



                                                                  (12.20)



            Знайдемо похідну

                                    (12.21)



У результаті підстановки функції (12.20) та похідної від неї (12.21) у рівняння (12.14) отримаємо



або

                                                  (12.22)



            Оскільки функцію   можна підібрати довільно (а тоді  визначити на основі рівняння (12.14), будемо шукати  з рівняння



                                                            (12.23)



(при цьому перший доданок зліва у (12.22) перетвориться на нуль). Зауважимо, що це не що інше, як лінійне рівняння (12.15) відносно , розв’язок якого



                                      .



Оскільки нас цікавить лише один який-небудь ненульовий розв’язок рівняння (12.23), то в цій формулі покладемо . Тоді . При цьому рівняння (12.22) спрощується й набуває  вигляду     ,  або             .



Це - диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Звідси

                        .



            Отже, згідно з (12.21) загальний розв’язок рівняння (12.14)

                 ,      (12.19а)



де  - довільна стала.



            Отже, розв’язки (12.19) та цього рівняння збіглися. Зауважимо, що при встановленні типу диференціального рівняння та його розв’язання слід врахувати, що не обов’язково шукається залежність виду ; можна спробувати знайти . Наприклад, диференціальне рівняння



можна подати у вигляді



звідки видно, що воно є лінійним, якщо  вважати функцією, а - аргументом. Це ж саме рівняння можна записати й так:



Отже, якщо вважати функцією, а - аргументом, то дістаємо лінійне рівняння.



            Розглянемо деякі приклади розв’язання лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Приклад 1.Розв’язати лінійне рівняння :



а) методом варіації довільної сталої;

б) підстановкою  .



Р о з в ‘ я з о к. а) Згідно з методом варіації довільної сталої спочатку розв’яжемо відповідне рівняння без правої частини:

.



Маємо , звідки   або .  Варіюючи сталу , .



Підставимо  та  як функції від  у вихідне рівняння:



                        .



            Звідси  і, отже, , де - довільна стала.



Таким чином, загальний розв’язок має вигляд

                        .



            б) Цей же самий результат отримаємо, застосувавши до початкового рівняння підстановку :



або .



            Знайдемо  з рівняння . Відокремимо змінні: , звідки . Запишемо рівняння відносно , звідси . Отже загальний розв’язок    (довільна стала ) збігається як слід було чекати, із розв’язком, знайденим раніше.



            Приклад 2.  При відстоюванні суспензії має місце повільне осідання твердих частинок під дією сили ваги , якщо опір середовища пропорційний швидкості осідання частинок, що осідають в рідині без початкової швидкості.

            Р о з в ’ я з о к. Згідно з законом Ньютона, де маса частинки;  швидкість її руху;  час;   сила дії на частинку. Враховуючи умову задачі, маємо , де вага частинки; сила опору; коефіцієнт пропорційності. Отже, відносно швидкості руху  дістаємо рівняння



,



або , причому .



            Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Щоб знайти його частинний розв’язок, що задовольняє початковій умові , спочатку відшукаємо загальний розв’язок рівняння. Використаємо метод варіації довільної сталої. Відповідне однорідне рівняння має вигляд



                        .



            Після відокремлювання змінних та інтегрування отримаємо

, звідки  .



            Щоб знайти загальний розв’язок рівняння з правою частиною, вважаємо, що в останній рівності **.**



Тоді ,



і відносно  одержується, згідно з умовою, таке рівняння:



,або.



Звідси  ,



де довільна стала. Інтегруючи, маємо



.



Тоді загальний розв’язок рівняння набуває вигляду

    ,або     .



Поклавши тут   і , знайдемо, що .



Отже, частинний розв’язок поставленої задачі матиме вигляд

.



Приклад 3.   З фізики відома залежність між силою стуму та електрорушійною силою  в колі, яке має опір  та самоіндукцію  ( та - сталі):



.



Якщо , то це рівняння повністю збігається з диференціальним рівнянням, розглянутим у прикладі 2, хоч описувані процеси зовсім різні.



Нехай . Тоді відносно  маємо диференціальне рівняння, яке зручно записати у вигляді



.



Знайдемо загальний розв’язок цього лінійного рівняння. Нехай , де  та - невідомі функції. Тоді  Після підстановки в рівняння  та   маємо:



або .



            Невідому функцію  знайдемо з рівняння



,звідки . Величина  визначається з рівності ,



звідки

,



де довільна стала. Позначимо інтеграл, що фігурує справа, через :   . Інтегруючи двічі частинами, отримаємо



,



а функцію  визначимо за допомогою рівності



            .



            Отже, сила струму  визначається виразом



            .



**12.5. Рівняння Бернуллі**

Диференціальне рівняння виду

                          ,                            (12.24)



  в якому   неперервні функції, а число  відмінне від



  нуля та одиниці, називається *рівнянням Бернуллі*(при



  маємо лінійне рівняння, а при - рівняння з відокремлюваними



  змінними).

            Покажемо, що рівняння Бернуллі зводиться до лінійного диференціального рівняння першого порядку. Для цього поділимо ліву й праву частини рівняння (12.24) на  :



та виконаємо заміну змінної . Оскільки



                            ,



диференціальне рівняння Бернуллі перетворюється на рівняння



яке є лінійним. Проінтегрувавши його одним з описаних раніше способів і повернувшись від  до попередньої змінної, можна отримати розв’язок рівняння Бернуллі.



            Зауважимо, що зручніше розв’язувати рівняння Бернуллі, не зводячи його до лінійного, за допомогою підстановки , тобто так само, як і лінійне неоднорідне рівняння.



            Покажемо це на прикладі.

            Приклад .Розв’язати рівняння Бернуллі

                                   .



            Р о з в ’ я з о к. Будемо шукати невідому функцію  у вигляді.. Підстановка цієї функції у рівняння приводить до рівності  або



.



Функцію  знайдемо із співвідношення , яке отримується, якщо вираз у дужках прирівняти до нуля: . Відносно  отримується рівняння з відокремлюваними змінними



, загальний інтеграл якого буде таким:



                        ,



де довільна стала. Отже, відповідь



                      .



**12.6. Рівняння в повних диференціалах.**

**Інтегруючий множник**

              Означення. Диференціальне рівняння вигляду

                                               (12.25)



називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо   -  неперервні диференційовані функції,  для яких



виконується співвідношення

                         ,                                              (12.26)



причому   та   - також неперервні функції.



            Покажемо, що коли ліва частина рівняння (12.25) є повним диференціалом деякої функції , то виконується умова (12.26), і навпаки, з виконання умови (12.25) випливає, що ліва частина рівняння (12.25) – повний диференціал (вперше цю умову отримав член Петербурзької академії наук Л.Ейлер (1707-1783)).



            Справді, нехай зліва у рівнянні (12.25) стоїть повний диференціал, тобто .



            Оскільки

                        ,



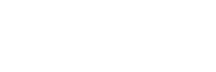
маємо



            Тоді частинні похідні   та   визначаються за формулами



                          .



            Оскільки зліва в цих рівностях згідно з умовою записані неперервні функції, то це означає, що й праві частини, тобто   та



,  також неперервні. Звідси випливає, що , що й доводить рівність (12.26).



            Припустимо тепер, що умова (12.26) виконується, і знайдемо функцію , завдяки якій диференціальне рівняння (12.25)  можна подати у формі



                                                               (12.27)



            Оскільки , то інтегруючи, маємо



                                              (12.28)



де - абсциса будь-якої точки в області існування розв’язку, а  - поки що невідома функція, яка залежить лише від . Знайдемо похідну , користуючись формулою (12.28):



                                                     (12.29)



Враховуючи, що  і користуючись умовою (12.26) для заміни підінтегральної функції, з (12.29) отримуємо



.



            Отже,    або



.



Звідси , або  ,



де - довільна стала.  Підставляючи знайдену функцію у вираз (12.28), отримаємо



.



            Це дозволяє записати загальний розв’язок рівняння (12.25) (або те ж саме рівняння (12.27)) у вигляді:

            - довільна стала.



Зауваження.  На практиці зручніше продиференціювати

рівність (12.28) за , потім замінити  відомою функцією , а далі – визначити   та  .



            Приклад .  Розв’язати рівняння



            Р о з в ’ я з о к. Позначимо



і переконаємося, що це – рівняння в повних диференціалах. Справді, частинні похідні і  рівні між собою:



Отже, умова (12.26) виконується. Для знаходження функції  про інтегруємо рівність .



Маємо   .



Звідси визначимо похідну:   та прирівняємо  її до відомої функції :



                        .



            Отже,  і, ,



де - довільна стала.



            Функцію  знайдено:



                        .



Загальний інтеграл рівняння має вигляд .



            Розглянемо питання про можливість зведення рівняння виду (12.25), для якого не виконується умова (12.26), до рівняння в повних диференціалах. Домножимо обидві частини рівняння (12.25) на деяку функцію  таку, що рівняння



                        (12.30)



буде рівнянням у повних диференціалах. Згідно з доведеним для цього необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність, аналогічна рівності (12.26):

                             ,



або

                        .



Зведемо подібні члени

                        .



            Поділивши обидві частини цього рівняння на та врахувавши, що , отримаємо



                          (12.31)



            Це рівняння в частинних похідних відносно . Розв’язати його – це завдання не простіше, ніж інтегрування вихідного рівняння. Розглянемо два частинні випадки, коли рівняння (12.31) спрощується і його можна розв’язати.



1) Нехай шуканий інтегральний множник залежить лише від : .



Тоді , і рівняння (12.31) набуває вигляду



                                               (12.32)



            Якщо права частина цього рівняння не залежить від , то воно легко інтегрується.



2) Якщо інтегральний множник є функцією тільки від : , то , а .



Тоді рівняння (12.31) можна подати таким чином:

                                               (12.33)



            Якщо вираз справа залежить лише від , рівняння (12.33) інтегрується.



Приклад 2.  Розв’язати рівняння . Зауважимо, що в розглянутому випадку .



            Р о з в ’ я з о к.   Знайшовши частинні похідні



переконуємося, що умова (12.26) не виконується.

            Спробуємо підібрати інтегральний множник виду . Рівняння (12.32) набуває вигляду



.



            Вираз у правій частині останньої рівності залежить і від , і від . Отже, інтегрального множника вигляду  не існує.



            Припустимо, що , і складемо рівняння (12.33):



.



            Оскільки вираз у правій частині цієї рівності залежить від , рівняння інтегрується. Знайдемо один з його частинних розв’язків:



, звідки . Перевіримо, чи множник  знайдено правильно. Для цього домножимо обидві частини вихідного рівняння на  та переконаємося, що коефіцієнти отриманого рівняння задовольнятимуть умові (12.26). Маємо



                                      .



Тоді



і, отже, інтегральний множник було знайдено правильно (оскільки (12.26) – рівняння в повних диференціалах). Знайдемо функцію . Оскільки



 то , або



.



 Продиференціюємо  по  та прирівняємо цю похідну до :



.



Отже,  і .



Тоді

,



і загальний інтеграл рівняння має вигляд

