## 

## **Реферат**

## **на тему:**

## ***“Густина (щільність) розподілу імовірностей одновимірної і багатовимірної випадкових величин”*****Густина розподілу (щільність імовірності).**

Нехай є неперервна випадкова величина  з неперервною та диференційованою функцією розподілу .

**Густиною ймовірності ** називається похідна від функції розподілу випадкової величини.



Функція  характеризує щільність, з якою розподіляються значення випадкової величини в даній точці. Інколи  називають диференціальною функцією розподілу, або диференціальним законом розподілу.

Терміни “щільність розподілу” або “щільність ймовірності” особливо показові при вживанні механічної інтерпретації розподілу. Тобто,  буквально характеризує щільність розподілу маси по , так звану лінійну щільність. Крива, що відображає щільність розподілу випадкової величини, називається **кривою розподілу**.

Розглянемо закони розподілу і щільність їх ймовірностей, що найбільш часто зустрічаються:

1) Нормальний закон (закон Гаусса)

Щільність імовірності випадкових величин задається формулою:

,

де  — математичне сподівання

 — середнє квадратичне відхилення.

2) Рівномірний розподіл



3) Показниковий закон

,

де

 .

4) Якщо неперервна випадкова величина приймає тільки додатні значення, а щільність ймовірності визначається

,

де α>0

то закон розподілу називається законом Максвела.

5) Закон Ст’юдента

,

де *к* – параметр розподілу  – значення гама функції, яка визначається:

, при 

 – збігається, так як 

6) Закон розподілу визначається щільністю ймовірності

 

де *k* – параметр розподілу.

7) Гама-розподіл має щільність ймовірностей

 , 



В теорії та на практиці зустрічаються випадкові величини, розподілені і по інших законах.

## Властивості щільності розподілу.

1. Щільність розподілу — невід’ємна функція, тобто геометрично значить, що всі криві вище.



*f(x)*

1. , отже на усьому інтервалі *х* ∈ (–∞;∞) подія вірогідна

**Теорема**. *Імовірність того, що неперервна випадкова величина  прийме яке-небудь значення з інтервалу  рівна визначеному інтегралу:*

.

Зауваження: функція розподілу , як і всяка імовірність, є величина безрозмірна. Розмірність щільності розподілу обернена розмірності випадкової величини.

Приклад.

Знайти  випадкової величини, розподіленої за нормальним законом розподілу.





Вводимо заміну

, 

, отже



 — інтегральна формула Муавра–Лапласа.

Тоді .

## **Функція розподілу випадкової величини.**

Нехай дискретна випадкова величина задана законом розподілу. Розглянемо подію, яка полягає в тому, що випадкова величина **Y** прийме яке–небудь значення менше будь–якого числа **X**. Ця подія має певну ймовірність.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x*i | *X*1 | *X*2 | *…* | *X*n |
| *P*i | *P*1 | *P*2 | *…* | *P*n |

Позначимо

******

При зміні **X** будуть змінюватися і ймовірності. Отже **F(*x*)** можна розглядати як функцію змінної величини **X.**

**Функцією розподілу** **випадкової величини** **Y** називається функція F(*x*), яка виражає для кожного **X** ймовірність того, що **Y** прийме яке-небудь значення менше заданого.

***F*(*x*) –** постійна на інтервалах та має скачки в точках, що відповідають її значенням.

## Властивості функції розподілу.

**Теорема 1.** *Ймовірність того, що випадкова величина* ***Y*** *прийме значення , що належить відрізку* [**]*, дорівнює прирощенню її функції розподілу на цій ділянці, тобто:*



**Теорема 2.** *Функція розподілу будь–якої випадкової величини являє собою неспадну функцію і змінюється від* ***0*** *до* ***1****, при зміні* ***x*** *від , тобто:*

**

Приклад:

Команда нараховує 2 стрільці, кількість балів, що вибиваються кожним з них після одного пострілу, являють собою випадкові величини **X**1та **X**2 , які характеризуються наступними законами розподілу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Число балів *x*1 | 3 | 4 | 5 |
| P1 | 0,3 | 0,4 | 0,3 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число балів *x*2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| P2 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,5 |

Причому результати пострілів одного з них не впливають на результати іншого.

Завдання:

1) Скласти закон розподілу числа балів, що вибиваються командою, якщо стрільці роблять по одному пострілу.

2) Знайти математичне сподівання для команди.

3) Знайти дисперсію.

4) Скласти та збудувати функцію розподілу.

Для розв’язання цієї задачі складемо таблицю*:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | **X**і | **Y**і | **X**і**+Y**і | **P(*x***і**+*y***і**)=P(*x***і**)⋅P(*y***і**)** |
| 1 | 3 | 1 | 4 | 0,3**⋅**0,1=0,03 |
| 2 | 3 | 2 | 5 | 0,3**⋅**0,1=0,03 |
| 3 | 3 | 3 | 6 | 0,3**⋅**0,1=0,03 |
| 4 | 3 | 4 | 7 | 0,3**⋅**0,2=0,06 |
| 5 | 3 | 5 | 8 | 0,3**⋅**0,5=0,15 |
| 6 | 4 | 1 | 5 | 0,4**⋅**0,1=0,04 |
| 7 | 4 | 2 | 6 | 0,4**⋅**0,1=0,04 |
| 8 | 4 | 3 | 7 | 0,4**⋅**0,1=0,04 |
| 9 | 4 | 4 | 8 | 0,4**⋅**0,2=0,08 |
| 10 | 4 | 5 | 9 | 0,4**⋅**0,5=0,2 |
| 11 | 5 | 1 | 6 | 0,3**⋅**0,1=0,03 |
| 12 | 5 | 2 | 7 | 0,3**⋅**0,1=0,03 |
| 13 | 5 | 3 | 8 | 0,3**⋅**0,1=0,03 |
| 14 | 5 | 4 | 9 | 0,3**⋅**0,2=0,06 |
| 15 | 5 | 5 | 10 | 0,3**⋅**0,5=0,15 |

Таким чином, закон розподілу числа отриманих балів команди буде:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X**і | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **P**і | 0,03 | 0,07 | 0,1 | 0,13 | 0,26 | 0,26 | 0,15 |

**

**

Для обчислення математичного сподівання випадкової величини *х2* складемо закон розподілу величини 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
|  | 0,03 | 0,07 | 0,1 | 0,13 | 0,26 | 0,26 | 0,15 |

2) Математичне сподівання



3) Знайдемо дисперсію





4) Функцію розподілу знаходимо за визначенням

,

отже

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. .

Отже графік функції розподілу

4

5

6

7

8

9

10

0.5

1

0,75

0,25

F(*x*)

*x*

**Використана література:**

* Вища математика. Підручник для ВУЗів. – К., 1990.