**Системы линейных уравнений и неравенств**

Основные вопросы лекции: основные понятия и определения теории систем уравнений; система n линейных уравнений с n неизвестными; метод обратной матрицы; метод Крамера; метод Гаусса; теорема Кронекера-Капелли; система n линейных уравнений с m неизвестными; однородные системы линейных уравнений; фундаментальная система решений; структура общего решения.

Система m линейных уравнений с nпеременными имеет вид:



или

(1)



где a11, a12, … , amn— произвольные числа, называемые соответственно коэффициентами при переменных и b1,b2, … , bm - свободными членами уравнений.

Решением системы(1) называется такая совокупность nчисел х1, х2, ... , хn *,* при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется совместной*,* если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной*,* если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

; В=(b1, b2, … , bn)т; Х=(x1, x2, … , xn)т



где А— матрица коэффициентов при переменных*,* или матрица системы*,* X *—* матрица-столбец переменных; В — матрица-столбец свободных членов*.*

На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

А\*Х=B (2)

А матрица состоящая из А, В, Х матриц называется расширенной матрицей:

- расширенная матрица.



Метод Гаусса — метод последовательного исключения переменных — заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Рассмотрим решение системы (1) m линейных уравнений с nпеременными в общем виде:

(3)



Если m=n, то рассмотрим расширенную матрицу. Учитывая правую часть, приведем данную матрицу к треугольному виду:



Ситема линейных уравнении соотвествующее данной матрице запишем в следуюшем виде

(4)



Если в данном уравнении cnn≠0, cn-1n-1≠0, ... , c33≠0, c22≠0, a11≠0 то, в первую очередь найдем

xn, а затем постепенно поднимаясь находим остольные решения - xn-1, … , x3, x2, x1.

Формула Крамера

Теорема Крамера. Пусть |A|— определитель матрицы системы А, а Δj — определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если Δ ≠0, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

(5)



Формулы (5) получили название формул Крамера*.*

Метод обратной матрицы

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. m=n*.* Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель Δ=|A| называется определителем системы*.*

(1) уравнение можно записать в матричном виде

А\*Х=B (6)

, , .



Умножая *слева* обе части матричного равенства (6) на матрицу А-1,получим А-1(АХ)=А-1В*.* Так как А-1(АХ)=( А-1А)Х=ЕХ=Х,то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

Х=А-1\*B (7).

Система n линейных уравнений с n переменными

Решение системы n линейных уравнений с n переменными находять ниже укаженными методами:

1. Метод обратной матрицы;
2. Формула Крамера;
3. Метод Гаусса.

Теорема Кронекер – Капелли. Система m линейных уравнений с n переменными

Теорема Кронекера—Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е. r=n, то система (1) имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е. r<n, то система (1) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Системы линейных однородных уравнений

Система mлинейных уравнений с n переменными называется системой линейных однородныхуравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

(8)



Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение (0; 0; ...; 0).

Систему (8) можно записать а виде:

А\*Х=0 (9).

Если в системе (8) m=n, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, как это следует из теоремы и формул Крамера. Ненулевые решения, следовательно, возможны лишь для таких систем линейных однородных уравнений, в которых число уравнений меньше числа переменных или при их равенстве, когда определитель системы равен нулю.

Иначе: система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. при r(A)<n.