Министерство образования Российской Федерации.

Реферат.

Неевклидова геометрия.

**Содержание:**

1. Введение
2. Появление геометрии Лобачевского
3. Три модели геометрии Лобачевского

1) Модель Пуанкаре

2) Модель Клейна

3) Интерпретация Бельтрами

1. Свойства и понятия
2. Практическое применение геометрии Лобачевского
3. 1) Теорема Пифагора

2) Замечание к теореме Пифагора

3) Площадь треугольника

4) Длина окружности и площадь круга

1. Вывод
2. Список источников

**1. Введение:**

Геометрия – это одна из древнейших наук. Исследовать различные пространственные формы издавна побуждало людей их практическая деятельность. Древнегреческий ученый Эдем Родосский в IV веке до нашей эры писал: «Геометрия была открыта египтянами, и возникла при измерении Земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлития реки Нил, постоянно смывавшей границы. Нет ничего удивительного, что эта наука, как и другие, возникла из потребности человека».

Многие первоначальные геометрические сведения получили также шумеро-вавилонские, китайские и другие ученые древнейших времен. Устанавливались они сначала только опытным путем, без логических доказательств.

Как наука, геометрия впервые сформировалась в Древней Греции, когда геометрические закономерности и зависимости, найденные ранее опытным путем, были приведены в надлежащую систему и доказаны.

В III веке до нашей эры греческий ученый Евклид привел в систему известные ему геометрические сведения в большом сочинении «Начала». Эта книга более двух тысяч лет служила учебником геометрии во всем мире.

В своём реферате я хочу показать, что кроме геометрии, которую изучают в школе (Геометрии Евклида или употребительной геометрии), существует еще одна геометрия, геометрия Лобачевского. Эта геометрия существенно отличается от евклидовой, например, в ней утверждается, что через данную точку можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной прямой, что сумма углов треугольника меньше 180 В геометрии Лобачевского не существует прямоугольников, подобных треугольников и так далее.

Я выбрал данную тему по нескольким причинам: теория геометрии Лобачевского помогает взглянуть по-другому на окружающий нас мир, это интересный, необычный и прогрессивный раздел современной геометрии, она дает материал для размышлений – в ней не все просто, не все ясно с первого взгляда, чтобы ее понять, нужно обладать фантазией и пространственным воображением. Ситуация с геометрией Лобачевского и геометрией Евклида во многом похожа на ситуацию с Теорией относительности Эйнштейна и классической физикой. Геометрия Лобачевского и ОТП Эйнштейна это прогрессивные взаимосвязанные теории, выполняющиеся на огромных величинах и расстояниях, и остающимися верными на приближениях к нулю. В пространственной модели ОТП используется не обычная евклидовая плоскость, а искривленное пространство, на котором верна теория Лобачевского.

Неевклидова геометрия появилась вследствие долгих попыток доказать V постулат Евклида, аксиому параллельности. Эта геометрия во многом удивительна, необычна и во многом не соответствует нашим привычным представлениям о реальном мире. Но в логическом отношении данная геометрия не уступает геометрии Евклида.

**2.Происхождение Неевклидовой геометрии.**

Среди аксиом Евклида была аксиома о параллельности прямых, а точнее, пятый постулат о параллельных линиях: **если две прямые образуют с третьей по одну ее сторону внутренние углы, сумма которых меньше развернутого угла, то такие прямые пересекаются при достаточном продолжении с одной стороны**.

В современной формулировке она говорит о существовании **не более одной прямой, проходящей через данную точку вне данной прямой и параллельной этой данной прямой**.

Сложность формулировки пятого постулата породила мысль о возможной зависимости его от других постулатов, и потому возникали попытки вывести его из остальных предпосылок геометрии. Все попытки заканчивались неудачей. Были попытки доказательства от противного: прийти к противоречию, предполагая верным отрицание постулата. Однако и этот путь был безуспешным.

Оказалось то, что пятый постулат не зависит от предыдущих, а значит, его можно заменить на ему эквивалентный. И в начале XIX века, почти одновременно сразу у нескольких математиков: у К. Гаусса в Германии, у Я. Больяи в Венгрии и у Н. Лобачевского в России, возникла мысль о существовании геометрии, в которой верна аксиома, заменяющая пятый постулат: **на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходят, по крайней мере, две прямые, не пересекающие данную.**

В силу приоритета Н. Лобачевского, который первым выступил с этой идеей в 1826, и его вклада в развитие новой, отличной от евклидовой геометрии последняя была названа в его честь «геометрией Лобачевского».

Аксиоматика планиметрии Лобачевского отличается от аксиоматики планиметрии Евклида лишь одной аксиомой: аксиома параллельности заменяется на ее отрицание – аксиому параллельности Лобачевского:

**Найдутся такая прямая a и такая не лежащая на ней точка A, что через A проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие a.**

Непротиворечивость системы аксиом доказывается представлением модели, в которой реализуются данные аксиомы.

**3. Три модели геометрии Лобачевского.**

Выделяют три различные модели геометрии Лобачевского:

1) Модель Пуанкаре

2) Модель Клейна

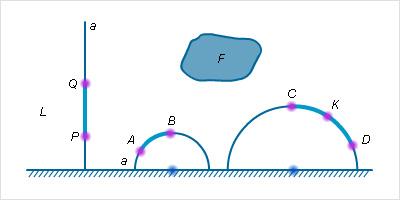
3) Отображение геометрии Лобачевского на псевдосфере (интерпретация Бельтрами)

**1) Модель Пуанкаре.**

В модели Пуанкаре на евклидовой плоскости E фиксируется горизонтальная прямая x. Она носит название «абсолюта». Точками плоскости Лобачевского считаются точки плоскости E, лежащие выше абсолюта x. Таким образом, в модели Пуанкаре плоскость Лобачевского – это полуплоскость L, лежащая выше абсолюта.

Прямыми плоскости L считаются полуокружности с центрами на абсолюте или лучи с вершинами на абсолюте и перпендикулярные ему.

Фигура на плоскости Лобачевского – это фигура полуплоскости L. Принадлежность точки фигуре понимается так же, как и на евклидовой плоскости E. При этом отрезком плоскости L считается дуга окружности с центром на абсолюте или отрезок прямой, перпендикулярной абсолюту (**рис. 1**). Точка K лежит между точками C и D, значит, что K принадлежит дуге CD. В условиях нашей модели это эквивалентно тому, что K' лежит между C' и D', где C', K' и D' – проекции точек C, K и D соответственно на абсолют. Чтобы ввести понятие равенства неевклидовых отрезков в модели Пуанкаре, определяют неевклидовы движения в этой модели. Неевклидовым движением называется преобразование L, которое является композицией конечного числа инверсий с центрами на абсолюте и осевых симметрий плоскости E, оси которых перпендикулярны абсолюту. Инверсии с центром на абсолюте и осевые симметрии



**Рисунок 1** плоскости E, оси которых перпендикулярны абсолюту, называют неевклидовыми симметриями. Два неевклидовых отрезка называют равными, если один из них неевклидовым движением можно перевести во второй.

**2)** **Модель Клейна.**

За плоскость принимается какой-либо круг (**рис. 2.1**), за точки - точки принадлежащие этому кругу, за прямые - хорды - конечно, с исключением концов, поскольку рассматривается только внутренность круга. За перемещения принимаются преобразования круга, переводящие его в себя и хорды - в хорды. Соответственно, "конгруэнтными" называются фигуры, переводимые друг в друга такими преобразованиями.

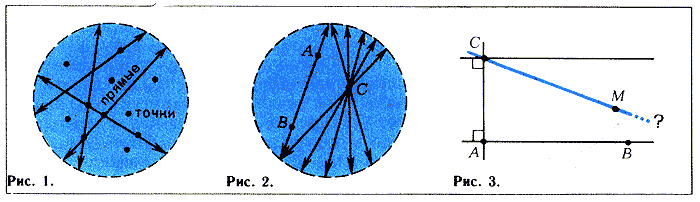


Рисунок 2

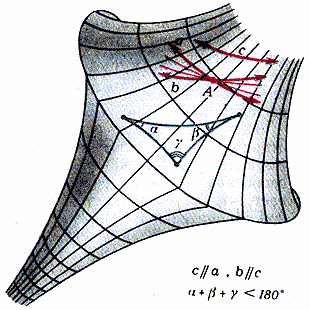
Очевидно, что в пределах определенной части плоскости (круга), как бы эта часть не была велика, можно провести через данную точку **С** множество прямых, не пересекающих данной прямой. Внутри круга любого конечного радиуса существует множество прямых (т.е. хорд), проходящих через т. **С** и не встречающих прямой **АВ** (**рис.2.2**). Всякая теорема планиметрии Лобачевского является в этой модели теоремой геометрии Евклида и, обратно, всякая теорема геометрии Евклида, говорящая о фигурах внутри данного круга, является теоремой геометрии Лобачевского. Это общее утверждение доказывается проверкой справедливости в модели аксиом геометрии Лобачевского. Поэтому, если в геометрии Лобачевского имеется противоречие, то это же противоречие имеется и в геометрии Евклида.

Далее, всякая теорема геометрии Лобачевского описывает в модели Клейна некоторые факты, имеющие место внутри круга. Именно факты, если мы берем не абстрактный круг, а реальный круг и реальные хорды и интерпритируем теоремы как утверждения об этих реальных вещах, взятые, конечно, с той точностью, которая доступна для наших построений. Таким образом, геометрия Лобачевского в модели Клейна имеет вполне реальный смысл с той точностью, с какой вообще имеет смысл геометрия в применении к реальным телам.

**3) Отображение геометрии Лобачевского на псевдосфере (интерпретация Бельтрами)**

Эудженио Бельтрами (1835-1900) нашел модель для неевклидовой геометрии, показав в своей работе «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии» (1868г.), что наряду с плоскостями, на которых осуществляется евклидова геометрия, и сферическими поверхностями, на которые действуют формулы сферической геометрии, существуют и такие реальные поверхности, названные им псевдосферами (**рис.4**), на которых частично осуществляется планиметрия Лобачевского.

Известно, что сферу можно получить вращением полуокружности вокруг своего диаметра. Подобно тому, псевдосфера образуется вращением линии FCE, называемой трактрисой, вокруг ее оси АВ (**рис.3**). Итак, псевдосфера – это поверхность в обыкновенном реальном пространстве, на котором выполняются многие аксиомы и теоремы неевклидовой планиметрии Лобачевского. Например, если начертить на псевдосфере треугольник, то легко усмотреть, что сумма его внутренних углов меньше 2π. Сторона треугольника – это дуги псевдосферы, дающие кратчайшее расстояние между двумя ее точками и выполняющие ту же роль, которую выполняют прямые на плоскости. Эти линии, называемые геодезическими, можно получить, зажав туго натянутую и политую краской или мелом нить, в вершинах треугольника. Таким образом, для планиметрии Лобачевского была найдена реальная модель - псевдосфера. Формулы новой геометрии Лобачевского нашли конкретное истолкование. Ими можно было пользоваться, например, для решения псевдосферических треугольников. Псевдосферу, которую мы назвали «моделью», Бельтрами назвал интерпретацией (истолкованием) неевклидовой геометрии на плоскости.



A D N B

#### Рисунок 3

F

E

C

Впоследствии, с развитием и введением в математику аксиоматического метода, под

**Рисунок 4** интерпретацией (или моделью) некоторой системы аксиом стали понимать любое множество объектов, в которых данная система аксиом находит свое реальное воплощение, то есть, любая совокупность объектов, отношение между которыми полностью совпадают с теми, которые описываются в данной системе аксиом. При этом полагают, что если для некоторой системы аксиом существует или можно построить интерпретацию (модель), то эта система аксиом непротиворечива, то есть, не только сами аксиомы, но и любые теоремы, на них логически основывающиеся никогда не могут противоречить одна другой.

**4. Свойства и понятия.**

Рассмотрим некоторые свойства, понятия и факты выполняющиеся в геометрии Лобачевского. В данном случае я рассматривал свойства основываясь на модели Клейна. Большинство из них будут выполнятся и на других моделях неевклидовой геометрии.

1) Если прямые CN и CL не встречают прямой АВ, то любая прямая СМ, проходящая через т. C внутри вертикальных углов NCL и N’CL’ также не встретит прямой АВ (рис.5). Отсюда первое следствие аксиомы Лобачевского: через т. С вне прямой АВ плоскости АВС, проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающихся с прямой АВ.

N` C N

L

A D К B

**Рисунок 5**

2) Если соединить (**рис.5**) какую-либо точку прямой DB с т. С, получим прямую, допустим, СК, проходящую через т. С и встречающую АВ. Итак, все прямые, проходящие через т. С внутри прямого угла NCD, разбиваются на две категории, на два класса: встречающие прямую АВ (названные Лобачевским «сходящимися» с АВ) и не встречающие прямую АВ (их Лобачевский называет «расходящимися» с АВ). Любая прямая первой категории образует с перпендикуляром CD угол, меньший угла, образованного перпендикуляром CD с любой прямой второй категории. Вращаясь непрерывно около т. С в направлении против часовой стрелки, прямая СК на известном этапе, допустим в положении CL, перестанет пересекать АВ и из сходящейся перейдет в категорию расходящихся с АВ прямых. Эта предельная прямая CL, служащая переходной прямой, граничной, отделяющей сходящиеся от расходящихся прямых, и названной Лобачевским параллельной к прямой АВ из т. С. Итак, параллельная CL – это не просто расходящаяся прямая, а первая, граничная расходящаяся, т.е. такая, что любая прямая, проходящая через т. С внутри угла, образованного параллельной CL и перпендикуляром CD, является сходящейся прямой, а всякая прямая, проходящая внутри угла LCN будет расходящаяся с прямой АВ. Угол DCL, образованный параллельной CL с перпендикуляром CD, называют углом параллельности.

В силу симметрии относительно перпендикуляра CD внутри прямого угла N’CD получим картину, аналогично той, которую мы имеем в угле NCD, т.е. построив угол DCF равный углу DCL, получим прямую CF, также параллельную прямой АВ слева от перпендикуляра CD. Итак, через т. С, лежащую вне прямой АВ, проходят в плоскости АВС две прямые, параллельные прямой АВ, в одну и другую сторону этой прямой. Все прямые, проходящие внутри вертикальных углов, образованных параллельными прямыми LL’ и GG’ (в том числе и евклидова «параллельная» NN’), расходятся с АВ; все остальные прямые, проходящие через т. С сходятся с прямой АВ.

Следовательно: а) 2 прямые как АВ и NN’, имеющие общий перпендикуляр CD, расходятся; б) если вращать прямую NN’ около т. С, допустим, по часовой стрелке, а прямую АВ около т.D в том же направлении так, чтобы углы, образованные этими прямыми с пересекающей их прямой CD, оставались равными, то прямые АВ и NN’ остаются расходящимися, т.е. две прямые, образующие при пересечении с третьей прямой равные соответственные углы, расходятся.

3) Из предыдущего положения вытекает, что на параллели Лобачевского различается направление параллельности. Прямая CE параллельна прямой АВ в направлении или в сторону от A к B, прямая CF параллельна той же прямой AB в направлении или в сторону ВА (от В к А) (**рис.5).**

ε

ω

С

F

x

A B

D

**Рисунок 6**

Несмотря на коренные отличия, понятия параллельности у Лобачевского от одновременного понятия в геометрии Евклида, можно доказать, что «параллельность» в смысле Лобачевского тоже обладает свойствами взаимности или симметрии (если прямая ***а*** параллельна прямой ***в***, то ***в*** параллельна ***а***). И транзитивности (если ***а*** и ***в*** параллельны ***с***, то ***а*** и ***в*** параллельны между собой).

Приведем некоторые другие понятия и факты геометрии Лобачевского:

**1)** **Функция Лобачевского.**

Как уже говорилось выше, через т. С в плоскости САВ проходят 2 направленные параллели к прямой АВ (СЕ и CF), симметрично расположенные относительно перпендикуляра CD (**рис.6**). Угол параллельности, образованный каждой из этих параллелей с CD, является острым, его величина не постоянна и зависит от расстояния CD(в геометрии Евклида угол параллельности всегда прямой). То, что угол параллельности острый, вытекает непосредственно из аксиомы Лобачевского. В изменении этого угла с изменением расстояния CD можно убедиться путем следующих рассуждений (**рис.7**). Пусть C’D>CD, CE || AB, в т. С угол параллельности – W. Пусть далее прямая C’E ‘|| AB в т. С’ угол параллельности - W’. В силу свойства транзитивности CE||C’E’. Ясно, что WW’. Действительно, если допустить, что W= W’, то следует также допустить, что C’E’ и CE – расходящиеся прямые, как было показано выше, а это неверно. Построим C’K, образующую с CD угол   ясно, что ’<  , т.к. параллельC’E’ ближе к перпендикуляру, чем расходящаяся C’K. Итак, ' <  отсюда следует, что угол параллельности убывает по мере удаления от прямой АВ; чем ближе т. С к прямой АВ, т.е. чем короче перпендикуляр CD, тем больше угол параллельности. Если обозначить расстояние т. С от прямой АВ, т.е. длину перпендикуляра CD через х, то можно сказать, что угол параллельности есть функция от х, названная «функцией Лобачевского» и обозначаемая П (х). Это монотонно убывающая функция. При изменении аргумента х от 0 до  функция П (х) непрерывно изменяется соответственно от  /2 до 0. Таким образом,

K

E

С

С`

E′

ω`

ω

A D

**Рисунок 7**

B





При *х*  0 , иными словами, если оставаться в пределах сравнительно небольших расстояний, то угол параллельности мало отличается от  /2 то есть от этого значения, которое он имеет в евклидовой геометрии, это означает, что геометрия Лобачевского не противоречит, не исключает геометрии Евклида; последнего можно рассматривать как частный случай большой общей геометрии – геометрии Лобачевского. Реальный смысл предельного перехода (при х  0) от геометрии Лобачевского к геометрии Евклида состоит в том, что физика изучает, в конечном счете, только ограниченную, сравнительно небольшую часть пространства. Вот почему в окружающей нас среде (даже в пределах нашей планеты) свойства физического пространства приблизительно таковы, какими мы их знаем из Евклидовой геометрии, но для всего пространства, для мира звезд, для вселенной в целом, они иные, неевклидовы.

**2) Сумма углов треугольника меньше 2π.**

C

N

L

M

A

B

α

β

γ

γ

##### Рисунок 8

Это предположение эквивалентно аксиоме Лобачевского, то есть из него вытекает эта аксиома и наоборот. Для примера докажем первое. Пусть (**рис.8**) в прямоугольном треугольнике CDK сумма углов S=<2π, то есть <π.Это значит, что внутри угла NCK можно построить LCK = а (NCCD).

Прямая CL не может пересечь прямой АВ в какой- либо точке М, так как если бы это случилось, то угол DKC , внешний по отношению к треугольнику KCM , равнялся бы внутреннему, не смежному с ним углу треугольника KCM, что противоречит абсолютной геометрии о внешнем угле треугольника. Итак, через т. С, кроме CN , проходит еще одна прямая – CL, не встречающая прямой АВ; следовательно, верна аксиома Лобачевского. Разность (2π–S), то есть между 180º и суммой углов данного треугольника, называется угловым дефектом этого треугольника.

**3)** Предложение «сумма углов четырехугольника меньше 4π» вытекает из предыдущего. Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нет ни прямоугольников, ни квадратов. Вообще сумма углов n – угольника меньше 2π(n-2).

**4)** Внешний угол треугольника больше суммы внутренних, с ним не смежных углов. Действительно, пусть внешний угол треугольника, смежный с внутренним углом треугольника и пусть и  - остальные его внутренние углы, тогда: π.

Следует, что > + .

**5)** Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны между собой. Это четвертый признак равенства треугольников в геометрии Лобачевского.

Таким образом, в плоскости Лобачевского треугольник вполне определяется своими углами. Стороны и углы зависят друг от друга. Отсюда ясно, что в геометрии Лобачевского нет подобных фигур. Действительно, ведь из существования подобных фигур вытекает евклидова аксиома параллельности.

**6)** **Площади**. Уже известно, что, чем меньше размеры фигур, которые мы изучаем, тем ближе к геометрии Евклида, в которой угловой дефект треугольника равен 0. Доказывается следующая теорема: площадь треугольника прямопропорциональна его угловому дефекту. Чем меньше размеры фигуры, тем меньше ее дефект, тем меньше площадь. Однако угловой дефект по определениям не может превзойти 2π, следовательно, и площадь треугольника в геометрии Лобачевского не может стать больше некоторой, определенной, конечной величины.

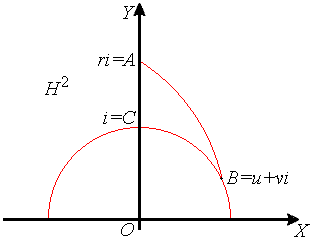
**5. Практическое применение геометрии Лобачевского.**

## 1) Теорема Пифагора.

**Теорема.** Для всякого прямоугольного треугольника плоскости Лобачевского выполняется равенство ch c = ch a ·ch b, где a, b - длины катетов, c - длина гипотенузы этого треугольника, а ch *x=(гиперболический косинус).*



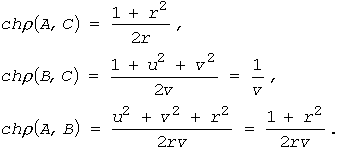
**Доказательство.** Воспользуемся моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского на евклидовой полуплоскости. Будем считать (**см. рисунок** ниже), что вершинам A, B, C данного прямоугольного треугольника соответствуют комплексные числа где так как этого всегда можно добиться с помощью некоторого неевклидова движения.



Используя формулу



для вычисления неевклидова расстояния между точками z и w в H2, получаем, что



Почленное перемножение двух первых соотношений и приводит, как показывает третье соотношение, к завершению доказательства теоремы.

## 2) Замечание к теореме Пифагора

## Н.И.Лобачевским было замечено, что созданная им неевклидова геометрия в бесконечно малом, то есть в первом приближении, совпадает с геометрией евклидовой плоскости. Проиллюстрируем это на примере теоремы Пифагора. Используя разложение гиперболического косинуса в ряд



получим для теоремы Пифагора соотношение



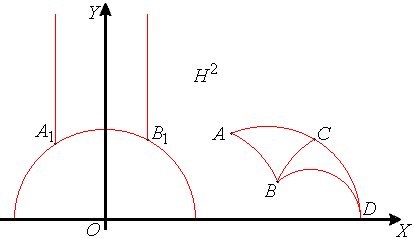
Исключая теперь члены низшего порядка, приходим к теореме Пифагора евклидовой геометрии:



## 3) Площадь треугольника

Подробный вывод формулы площади треугольника на плоскости Лобачевского я приводить не буду ввиду его сложности (в нем используется формулы, доказываемые лишь в курсе дифференциальной геометрии).

## Если ABC - треугольник в модели Пуанкаре, меры углов A, B и C - α, β и γ соответственно, - мера угла B в треугольнике ABD, а и мера углов B и C в треугольнике BCD. Тогда



Вследствие этого можно сформулировать теорему

**Теорема.**Для площади треугольника **ABC** с угламисправедлива формула



**Следствие1.**Площадь треугольника плоскости Лобачевского ограничена.

**Следствие 2.**Если дан выпуклый многоугольник с внутренними углами то



## 4) Длина окружности и площадь круга.

**Теорема.** Площадь круга с радиусом **r** равна



а длина окружности, ограничивающей этот круг, равна , где . Длина неевклидовой окружности не пропорциональна радиусу, как в случае евклидовой геометрии, а растет быстрее. Также площадь неевклидова круга больше площади круга евклидовой плоскости, имеющего тот же радиус.



**6. Вывод:**

Открытие неевклидовой геометрии, начало которому положил Лобачевский, не только сыграло огромную роль в развитии новых идей и методов в математике естествознании, но имеет и философское значение. Господствовавшее до Лобачевского мнение о незыблемости геометрии Евклида в значительной мере основывалось на учении известного немецкого философа И. Канта (1724-1804), родоначальника немецкого классического идеализма. Кант утверждал, что человек упорядочивает явления реального мира согласно априорным представлениям, а геометрические представления и идеи якобы априорны (латинское слово aprior означает – изначально, заранее), то есть, не отражают явлений действительного мира, не зависят от практики, от опыта, а являются врожденными человеческому миру, раз и навсегда зафиксированными, свойственными человеческому разуму, его духу. Поэтому, Кант считал, что Евклидова геометрия непоколебима, неизменна, и является вечной истиной. Еще до Канта геометрия Евклида считалась незыблемой, как единственно возможное учение о реальном пространстве.

Открытие неевклидовой геометрии доказало, что нельзя абсолютировать представления о пространстве, что «употребительная» (как назвал Лобачевский геометрию Евклида) геометрия не является единственно возможной, однако это не подорвало незыблемость геометрии Евклида. Итак, в основе геометрии Евклида лежат не априорные, врожденные уму понятия и аксиомы, а такие понятия, которые связаны с деятельностью человека, с человеческой практикой. Только практика может решить вопрос о том, какая геометрия вернее излагает свойства физического пространства. Открытие неевклидовой геометрии дало решающий толчок грандиозному развитию науки, способствовало и поныне способствует более глубокому пониманию окружающего нас материального мира.

# Список источников:

1. Математика XIX века, «Наука», М., 1981
2. “Квант” №11,№12 Академик АН СССР А.Д. Александров, Интернет-издания.
3. Юшкевич А.П., История математики в России, «Наука», М., 1968
4. Ефимов Н.В., Высшая геометрия, «Наука», М.,1971.
5. Неевклидовы пространства и новые проблемы физики, «Белка», М., 1993
6. Клайн М., Математика. Утрата определенности, «Мир», М., 1984
7. Г.И. Глейзер. История математики в школе IX – X классы. Пособие для учителей. Москва, «Просвещение» 1983г.
8. Даан Дальмедино А., Пейффер И. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. Перевод с французского. М: Мир.1986г.
9. Б.Л. Лаптев. Н.И. Лобачевский и его геометрия. Пособие для учащихся. М. «Просвещение», 1970г.
10. И.М. Яглам. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. Серия «Библиотека математического кружка» М: 1963г.
11. http://www.bankreferatov.ru
12. http://www.refportal.ru
13. http://www.edu.ru
14. http://www.
15. http://www.themesoch.narod.ru/t\_s
16. http://www.referat.online.ru
17. http://www.pautina.net