Средние величины

## 1. Сущность и значение средних величин

Средняя величина - обобщающая характеристика изучаемого признака в совокупности. Она отражает его типичный уровень в расчете на единицу совокупности в конкретных условиях места и времени.

Например, при изучении доходов рабочих концерна обобщающей характеристикой служит средний доход одного рабочего. Для его определения общую сумму средств, направленную на потребление делят на число работников концерна.

Естественно, индивидуальное значение дохода отличается от среднего уровня по ряду причин (квалификация, стаж, кол-во акций). Средний доход в свою очередь характеризует то общее, что свойственно всей совокупности рабочих предприятия, т.е. уровень дохода массы рабочих в конкретных условиях функционирования данного концерна в рассматриваемых условиях.

Важный вклад в обоснование теории средних величин внес крупный ученый 19 в. Адольф Кетле. Согласно теории Кетле массовые явления и процессы формируются под влиянием двух групп причин:

в первую группу общих для всех единиц совокупности причин относятся причины, определяющие состояние общего процесса. Они формируют типичный уровень:

вторая группа (индивидуальных) причин формирует специфические особенности отдельных единиц массовой совокупности. Эти причины не связаны с природой изучаемого явления, их называют случайными причинами.

При исчислении средней величины по массе единиц влияние случайных причин взаимопогашается и средняя, абстрагируясь от индивидуальных особенностей отдельных единиц совокупности, выражает общие свойства, присущие всем единицам.

Средние величины применяются для оценки достигнутого изучаемого показателя, при анализе и планировании производственно-хозяйственной деятельности предприятий, фирм, банков. Средняя величина всегда величина именованная и имеет ту же размерность что и признак у отдельных единиц совокупности. Основным условием научного использования средней величины является качественная однородность совокупностей, по которой исчислена средняя.

Пример. Акционерный капитал ООО - 1000тыс. грн, количество рабочих 100человек. Средний показатель участия в акционерном капитале - средняя величина пакета акций - 10тыс. грн. Эта величина показывает, что капитал компании находится преимущественно в руках мелких держателей акций. В действительности положение может быть следующим: один акционер имеет 1010 акций на сумму 505 тыс. грн, а 99 акционеров - 10 акций на сумму 495 тыс. грн. Таким образом существует две категории акционеров. К первой из них относится один акционер с величиной пакета, равной 505 тыс. грн. и ко второй группе - 99акционеров со средней величиной пакета акций 5 тыс. грн. Полученная средняя не может считаться надежной оценкой, так как она в два раза больше по своей величине, чем индивидуальные пакеты акций 99% акционеров.

Таким образом, прежде чем вычислять средние величины, необходимо провести группировку единиц изучаемой совокупности, выделив качественно однородные группы.

Средняя, рассчитанная по совокупности в целом, называется общей средней, а для каждой группы - групповой средней (рождаемость по регионам).

Сравнительный анализ групповых и общих средних используется для характеристики социально-экологических типов изучаемого общественного явления.

Существуют две категории средних величин:

Степенные средние (среднее арифметическое, гармоническое).

Структурные (мода, медиана).

При выборе вида средней величины обычно исходят из логической сущности осредняемого признака и по взаимосвязи с осредняемым показателем.

Величина итогового показателя не должна меняться при замене индивидуальных значений признака средней величиной. Способность средних величин сохранять свойства статистической совокупности называется определенным свойством.

В экономической практике широко используется широкий круг показателей, вычисленных в виде средних величин:

показатели средней зарплаты;

средний продолжительности рабочего дня;

среднего выполнения норм выработки рабочего;

средней урожайности сельхозкультур и т.д.

В каждом случае средние величины имеют определенное социально-экономическое содержание, обусловленное природой объекта.

Например, по каждой из 10 коров, закрепленных за дояркой, суточный удой каждой коровы составил:

12,5; 13,0; 13,5; 14,5; 15,5; 16,0; 16,5; 17,0; 17,5кг.

Средний удой

по группе коров = (12,5+13+13,5+14,5+15,5+16+16,5+17+17,5) /10=

= 151/10=15,1кг.

Средняя величина характеризует всю массу единиц изучаемой совокупности и выражает то общее, что характерно для данной совокупности, не характеризует отдельные единицы.

Средние величины могут быть как абсолютными, так и относительными. Средний удой (15,1кг) - абсолютная средняя величина. Средний процент выполнения плана реализации продукции по группе промышленных предприятий представляет собой относительную среднюю величину.

## 2. Виды средних величин и способы их вычисления

В статистике применяются различные виды средних величин:

Средняя арифметическая

Средняя гармоническая.

Средняя геометрическая.

Средняя квадратическая.

Мода, медиана и др.

Наиболее распространенным видом средних величин в статистике является средняя арифметическая. Реже применяется средняя гармоническая. При исчислении средних темпов динамики используется средняя геометрическая, а при исчислении показателей колеблемости величины признака применяется средняя квадратическая.

## 2.1 Средняя арифметическая (простая и взвешенная)

Средняя величина исчисляется как средняя арифметическая в тех случаях, когда имеются данные об отдельных значениях варьируемого признака.

Пример. Допустим, что имеется следующие данные о ежемесячном пробеге грузовых автомашин одной марки на автобазе:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Автомашины | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Пробег  Тыс. км. | 4,8 | 5,1 | 5,1 | 6,5 | 6,5 | 6,5 | 6,5 | 7,0 | 7,0 | 7,0 |

Для получения искомой средней величины необходимо определить суммарный пробег всех десяти автомашин и разделить эту сумму на число автомашин.

(4,8+5,1+5,1+6,5+6,5+6,5+6,5+7,0+7,0+7,0) /10=62/10=6,2тыс. км.

В этом примере данные о ежемесячном пробеге составляют вариационный ряд, а ежемесячный пробег является признаком, размер которого колеблется - варьирующим признаком.

Вариационный ряд может быть дан не упорядоченно, то есть отдельные его значения (варианты), могут быть расположены в любом порядке (4,8; 6,5; 5,1; 7,0; 6,5), а может быть дан, как в нашем примере, упорядоченный, т.е. когда варианты расположены в порядке либо возрастания, либо убывания их значений. такой упорядоченный вариационный ряд называется ранжированным.

Каждая варианта (значение признака) обозначается через Х (х1………. х10). если же в вариационном ряду n вариант, то вычисление средней можно представить в следующем виде:

\_

х = (х1+х2+……. +хn) /n;

Формула расчета средней арифметической простой:

\_

х = ∑х/n, где

х - значение признака,

n - количество вариант в вариационном ряду.

В данном примере одна автомашина имела пробег 4,8 тыс. км; две машины - по 5,1 тыс. км; четыре - по 6,5 тыс. км и три - по 7,0 тыс. км.

Сгруппируем теперь автомашины по размерам пробега:

|  |  |
| --- | --- |
| Группы авто (тыс. км) | Число авто |
| 4,8 | 1 |
| 5,1 | 2 |
| 6,5 | 4 |
| 7,0 | 3 |

Имеем ряд распределения, в котором одинаковые варианты объединены в группы и определены их частоты, т.е. числа, показывающие, сколько раз (как часто) встречается данная варианта во всей совокупности. Частоты обозначаются буквой f (в нашем примере 1, 2, 4,3).

Что бы рассчитать средний пробег по имеющимся данным необходимо:

\_

х = (4,8\*1+5,1\*2+6,5\*4+7,0\*3) / (1+2+3+4) =62/10=6,2тыс. км.

Порядок вычисления средней в общем виде:

\_

х= (х1\*f1+x2\*f2+…+xn\*fn) / (f1+f2+…+fn) =∑ (x\*f) /∑f, где

х - значения вариант,

f - значение весов каждой варианты (частоты).

Средняя арифметическая в этой форме называется средней арифметической взвешенной.

Сопоставление двух рассмотренных форм средней арифметической показывает, что средняя арифметическая простая и взвешенная отличается друг от друга лишь способом вычисления.

Назначением же и простой и взвешенной средней арифметической является определение среднего значения варьирующего признака с учетом распространенности отдельных вариант. Если в изучаемой совокупности варианты значений признака встречаются по одному разу или имеют одинаковый вес (т.е. каждая встречается одинаковое число раз), то применяется средняя арифметическая простая. Если варианты в совокупности встречаются по несколько раз, но имеют различные веса (т.е. каждая встречается разное число раз), то для определения среднего значения применяется средняя арифметическая взвешенная.

Иногда варианты признака, по которым вычисляется средняя, бывают представлены в виде интервалов (от-до).

Так, например, если ежемесячный пробег автомашины по группам автобаз представлен в виде интервалов:

от 4,0 до 5,0 тыс. км.

от 5,0 до 6,0 тыс. км и т.д. то в этих случаях конкретные значения вариант неизменны. Поэтому конкретное значение каждой варианты принимают условно равным середине следующего интервала. В нашем примере середина интервала составляет: для первой группы - (4,0 + 5,0) /2=4,5 тыс. км; для второй группы автобаз - (5,0+6,0) /2=5,5 тыс. км.

Исчисление середины интервала иногда усложняется тем, что у первой группы интервального ряда отсутствует начальная, а у последней группы - конечная граница интервала.

Например, для первой группы интервала: до 5,0 тыс. км; для последней - 8,0 тыс. км и более.

В этих случаях при определении величины варианты для первой группы исходят из того, что в этой группе величина интервала та же, что и в следующей за ней (т.е. второй группе), а при определении величины варианты для последней группы интервального ряда распределения - из предположения, что в последней группе величина интервала та же, что и в предыдущей группе.

На основе данных таблицы требуется определить средний ежемесячный пробег автомашин.

Таблица. Распределение автомашин по размеру их ежемесячного пробега

|  |  |
| --- | --- |
| Группы автомашин по размеру  ежемесячного пробега тыс. км. | Число автомашин в данной группе |
| До 5,0 | 40 |
| 5,0 - 7,0 | 80 |
| 7,0 - 8,0 | 130 |
| 8,0 и более | 50 |
| Итого | 300 |

Определяем середины интервалов, т.е. условные значения варианты каждой интервальной группы. Для второй и третей групп их определяют по формуле средней арифметической простой:

2гр= (5,0+7,0) /2=6 тыс. км.

3гр= (7,0+8,0) /2=7,5тыс. км

При вычислении середины интервала для первой группы, исходим из предположения, что величина интервала этой группы равна величине интервала следующей (второй) группы,

т.е. 7,0 - 5,0=2 тыс. км.

В таком случае начальное значение интервала первой группы составит 5,0 - 2,0=3,0 тыс. км. Следовательно, середина интервала для первой группы составляет: (3,0 + 5,0) /2=4 тыс. км.

При вычислении середины интервала для последней группы исходим из предположения, что она равна величине интервала в предыдущей (третей) группе, а именно, 8,0 - 7,0 = 1,0 тыс. км

Тогда конечное значение интервала последней группы равно 8,0+1,0=9,0 тыс. км. Следовательно, середина интервала для последней группы составляет: (8,0+9,0) /2=8,5 тыс. км. Результаты расчетов представлены в таблице.

Таблица. Показатели среднего размера ежемесячного пробега автомашин.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Группы машин по размеру их ежемесячного пробега, тыс. км | Середина интервала, тыс. км | Число автомашин |
| До 5,0 | 4,0 | 40 |
| 5,0-7,0 | 6,0 | 80 |
| 7,0-8,0 | 7,5 | 130 |
| 8,0 и более | 8,5 | 50 |

В данном примере средняя величина составляет:

\_ Х= (4\*40+6\*80+7,5\*130+8,5\*50) / (40+80+130+50) =2040/300=6,8тыскм

В данном случае размер средней (средний ежемесячный размер пробега автомашин в целом) определяется приближенно, т.к расчет основан на условном допущении равномерности распределения вариант в пределах каждого интервала.

## 2.2 Свойства средней арифметической

В процессе вычисления и статистико-экономического анализа средней арифметической может оказаться полезным знание некоторых ее математических свойств (без развернутых доказательств).

Средняя арифметическая постоянной величины равна этой постоянной:

\_

А=А при А=const.

Сумма отклонений отдельных вариант от средней арифметической равна "0". Это свойство средней используется для проверки правильности расчетов, а также дает возможность облегчить вычисление средней арифметической.

\_

∑ (Х-Х) =0

и для сгруппированных данных:

\_

∑ (Х-Х) \*f=0.

Сумма квадратов отклонений индивидуальных значений признаков (отдельных вариантов) от средней арифметической есть число наименьшее:

\_

∑ (Х-Х) 2=min.

И для сгруппированных данных:

\_

∑ (Х-Х) 2\*f=min.

Первые три свойства выражают сущностные черты рассматриваемой категории. Следующие позиции можно рассматривать, как вычислительные, поскольку они имеют некоторое прикладное значение.

Если все варианты признака Х увеличить или уменьшить на постоянное число А, то и со средней арифметической произойдет то же самое:

\_

∑ (Х±А) /n=Х±А.

\_

И ∑ (Х±А) \*f/∑f=Х±А.

Если все варианты разделить на какое-либо постоянное число d, то средняя арифметическая уменьшится в d раз:

\_

∑ (Х/d) /n = X/d,

\_

и ∑ ( (Х/d) \*f) /∑f = X/d.

Если все веса разделить на какое-либо постоянное число d, то средняя арифметическая не изменится:

\_

∑ (X (f/d)) /∑ (f/d) = (1/d) \*∑ (X\*f) / (1/d) \*∑f =X.

Из этого свойства вытекают два методических следствия:

Следствие 1. Абсолютные значения весов можно заменять их процентным выражением, приняв ∑f=100,0.

Следствие 2. Если все веса равны между собой, то вычисления средней арифметической простой дает результат, аналогичный вычислению средней арифметической взвешенной.

Прикладные свойства средней арифметической можно проиллюстрировать, применив упрощенный способ расчета, называемый "способом моментов".

Формула средней арифметической, исчисленной способом моментов, имеет вид:

\_

Х = m1\*d+A, где

m1 - первый момент, вычисляемый по формуле:

m1=∑ ( (x-А) /d\*f) /∑f, где

А - произвольная постоянная величина, чаще всего - это то значение признака, которое занимает срединное положение в данном ряду или то, которое имеет наибольшую частоту;

d - постоянная произвольная величина, выбирается после того, как найдены разности (х-А). Для вариационного ряда с равновеликими интервалами d принимается равным величине интервала. В остальных случаях d - это общий наибольший делитель разности (х-А).

## 2.3 Средняя гармоническая

Как указывалось выше, в статистической практике в большинстве случаев при определении средней величины применяется средняя арифметическая. Однако в ряде случаев используются и другие виды средних.

Средняя гармоническая - это величина обратная средней арифметической из обратных значений признака.

Простая средняя гармоническая - это величина, обратная средней арифметической из обратных значений признака. Средняя гармоническая бывает простой и взвешенной.

Простая средняя гармоническая вычисляется по формуле:

\_

Х=n/∑ (1/X).

Например, на изготовление единицы продукции один рабочий затрачивает 40 мин, а другой - 48 мин. Следует определить среднюю затрату времени на изготовление единицы продукции.

Если исчислить по формуле средней арифметической, то получим:

\_

Х= (40+48) /2=44мин.

Это средняя неточная, неправильная. Если на одно изделие затрачивается 40 мин, то при 8-часовом рабочем дне первый рабочий вырабатывает 12 изделий (8\*60/40), а второй - 10 изделий (8\*60/48). Вместе они вырабатывают в смену 22 изделия и затрачивают 960 мин (480+480), отсюда средние затраты времени исчислим по формуле средней гармонической:

\_

Х= 2/ (1/40+1/48) =43,6мин.

Средняя гармоническая взвешенная определяется по формуле:

\_

Х=∑М/∑ (М/х), где М=х\*f.

Пример.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Партия деталей | Себестоимость одной детали Х, р | Затраты на всю партию деталей М, р |
| 1 | 1,8 | 180 |
| 2 | 2,0 | 400 |
| 3 | 2,3 | 165 |

\_

Х=∑М/∑ (М/Х) = (180+400+165) / (180/1,8+400/2+165/2,3) =1,98р.

Средняя себестоимость единицы продукции исчислена по формуле средней гармонической, так как исходной базой исчисления средней себестоимости является отношение затрат на производство всей продукции к количеству единиц продукции.

Выбор вида средней зависит от задачи, стоящей перед исследователем, и характера исходных данных. Если имеются варианты и частота, то для расчета средней величины применяется средняя арифметическая. В тех случаях, когда имеются варианты и произведения вариант на частоты (Х\*f), а частоты неизвестны, для расчета средней величины используется средняя гармоническая.

Средняя гармоническая используется в тех случаях, когда следует исчислить среднюю из величин, обратно пропорциональных изучаемому явлению.

Среднее геометрическое рассчитывается по формуле

\_

Х= n√x1\*x2\*…\*xn= n√n\*xi

При применении средней геометрической индивидуальные значения признака представляют собой относительные величины динамики, построенные в виде цепных величин. Средняя характеризует средний коэффициент роста.

Средняя геометрическая используется так же для определения равноудаленной величины от max и min значений признака. Например, страховая фирма заключает договор на оказание клиентам различных услуг медстрахования. В зависимости от категорий медслучая, страховая сумма может изменяться от 100 до 10000грн. Средняя сумма выплат по страхованию √100\*10000=1000грн.

При расчете средней по сгруппированным данным важное значение имеет обоснование и выбор веса при расчете средней арифметической взвешенной. Например, имеются данные о доле экспорта в стоимости товарной продукции предприятия, выпускающего минеральные удобрения.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Доля экспорта в товарной продукции | Число предприятий | Товарная продукция предприятия тыс. грн |
| 0,15 | 5 | 200 |
| 0,2 | 7 | 460 |
| 0,3 | 4 | 600 |
| Итого | 16 | 1260 |

Средняя доля экспорта, исчисленная как средняя арифметическая взвешенная по числу предприятий, является формальной средней:

\_

Х= (0,15\*5+0,2\*7+0,3\*4) /16=0, 209=20,9%

Логически обоснованным можно считать выбор в качестве весов объемов товарной продукции, так как доля экспорта

\_

Х= (0,15\*200+0,2\*460+0,3\*600) /1260=0,24=24%

В числителе общая стоимость экспорта, в знаменателе - общая стоимость продукции по 6предприятиям.

Применение средних хронологической, геометрической и квадратической ограничивается специфическими случаями, которые будут рассмотрены в следующих темах.