Дисциплина: Высшая математика

Тема: Геометрические векторы

## 1. Геометрические векторы. Основные определения

В математике, физике, теоретической механике приходится иметь дело с величинами двух типов: одни имеют чисто числовой характер; другие же имеют не только числовую характеристику, но и связаны с понятием о направлении в пространстве. Рассмотрим, например, температуру, массу, энергию, скорость, ускорение, силу. Отличие последних трех величин от первых трех состоит в том, что с ними должно быть связано понятие о направлении. Первые три величины, не связанные с понятием о направлении, называются скалярами. Остальные три величины, имеющие определенное направление, называются векторами.

Так, при измерении температуры, мы получим положительное или отрицательное число, характеризующее ее величину в градусах. Точно так же можно измерить массу, энергию.

Определение 1. Скаляром называется величина, характеризующаяся только числом.

Следовательно, скаляры - это обычные числа, и различие между двумя одинаковыми числами может заключаться лишь в их размерности (м и см, м и кг).

Если необходимо измерить такую величину, как скорость точки, то для этого знать два числа (путь и время) недостаточно. Необходимо еще знать, куда двигается точка, то есть ее направление движения.

Определение 2. Вектором называется величина, характеризующаяся не только численным значением, но и направлением в пространстве.

Следовательно, утверждать, что если обе точки движутся со скоростью 2 , то их скорости равны, нет никакого основания. Необходимо знать в какие стороны они двигаются.



Из сказанного следует, что для описания скаляра достаточно написать число и указать его размерность. Для описания векторной величины используют направленные отрезки, длина которых при выбранном масштабе соответствует величине вектора, а направление - совпадает с направлением векторной величины. В дальнейшем эти отрезки и будем называть геометрическими векторами.

При изображении вектора одна точка, ограничивающая вектор, называется началом, а вторая - концом вектора. В конце вектора ставится стрелка. Для краткой записи вектор можно обозначить с помощью двух букв (первая соответствует началу, вторая - концу) или же одной буквы (здесь начало и конец не обозначены).



A

B



Определение 3. Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной или модулем и обозначается или .



Определение 4. Вектор, у которого конец совпадает с началом, называется ноль вектором и обозначается .



Определение 5. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или параллельных прямых. Векторы называются коллинеарными, если они расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение 6. Два вектора и называются равными, если они коллинеарные, одинаково направлены и равны по длине.



Записывается это так .



Из определения 6 следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства. При этом каждый новый вектор будет равен исходному.

Однако следует отметить, что все сказанное выше связано с так называемыми свободными векторами. Кроме них существуют еще передвижные и определенные векторы. У свободных векторов точку приложения можно выбирать где угодно. У передвижных - точку приложения можно перемещать вдоль самого вектора (например, сила, приложенная к твердому телу). У определенных векторов точка приложения должна быть зафиксирована (например, сила, действующая на жидкость). Но изучение всех векторов можно, в конечном счете, свести к изучению свободных векторов, поэтому в дальнейшем мы будем заниматься только ими.

## 2. Простейшие операции над векторами

К простейшим операциям над векторами относится сложение и вычитание векторов и умножение вектора на скаляр. Все эти операции называются линейными.

1) Сложение векторов.

Определение 1. Чтобы найти сумму двух векторов и , необходимо конец вектора совместить с началом . Вектор , соединяющий точки и , будет их суммой.



A

B

C

D

C

D



Обозначается сума следующим образом: . Величину ее можно найти и другим способом. Начала векторов и совмещаются и на них как на сторонах строится параллелограмм. Диагональ параллелограмма и будет суммой векторов.



A

B

D

C

D

C

D

A

B

D

C

D

C

D



Из правила параллелограмма видно, что сумма векторов обладает переместительным свойством

.



Если слагаемых больше, например, три: , поступают следующим образом. Строят вначале сумму , а затем, прибавляя , получают вектор .



Из рисунка видно, что тот же результат будет, если сложить вначале , а затем прибавить , то есть сумма векторов обладает сочетательным свойством:



.



Если при сложении нескольких векторов конец последнего совпадает с началом первого, то сумма равна ноль вектору . Очевидно, .



2) Разность векторов.

Определение 2. Разностью двух векторов и называется такой вектор , сумма которого с вычитаемым дает вектор .



Значит, если , то .



Из определения суммы двух векторов вытекает правило построения разности. Откладываем из общей точки векторы и . Вектор соединяет концы векторов и и направлен от вычитаемого к уменьшаемому.



Видно, что если на векторах и построить параллелограмм, то одна его диагональ соответствует их сумме, а вторая - разности.



3) Умножение вектора на число.

Определение 3. Произведением вектора на число называется вектор , определенный следующими условиями:



*1) ;*



2) вектор коллинеарен вектору ;



3) векторы и направлены одинаково, если , и противоположно, если .



Очевидно, что операция умножения вектора на число приводит к его растяжению или сжатию. Противоположный вектор можно рассматривать как результат умножения вектора на . Отсюда,



.



Из определения 3 следует, что если , то векторы и коллинеарны. Отсюда вытекает определение коллинеарности векторов.



Определение 4. Любые два вектора и коллинеарны, если связаны соотношением , где - некоторое число.



Величину можно определить из отношения . Оно положительно, если векторы направлены в одну сторону, и наоборот отрицательно, если направление векторов противоположно.



Из построения параллелограмма легко убедиться, что умножение вектора на число обладает распределительным свойством:

;



и сочетательным свойством

.



Определение 5. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором или ортом.

Обозначаются единичные векторы символами или .



Используя понятие единичного вектора, любой вектор можно представить следующим образом: .



## 3. Проекция вектора на ось

В процессе выполнения простейших операций иногда приходится сталкиваться с таким понятием, как проекция вектора на какую-либо ось. Введем вначале понятие угла между векторами.

Определение 1. Углом между векторами и называется наименьший угол , на который надо повернуть один из векторов до совмещения со вторым.



Положительным считается отсчет угла против часовой стрелки.

Пусть необходимо найти проекцию вектора на ось . Выберем на оси начало отсчета 0 и масштаб. Совместим с началом отсчета единичный вектор . Тогда угол между и осью будет равен углу между и . Спроецируем начало и конец вектора на ось . Тогда длина отрезка , а . Длина же проекции вектора :



.



O



a

b

l



A

B



Рис. 1

Определение 2. Проекцией вектора на ось называется разность между координатами проекций конца и начала вектора на ось .



Очевидно, что если - острый угол, проекция положительна; если - тупой угол, то отрицательна; если , то проекция равна нулю.



Теорема 1. Проекция вектора на ось равна произведению модуля этого вектора на косинус угла между ними:



.



Доказательство теоремы вытекает из Рис. 1.

Теорема 2. Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Доказательство. Пусть . Обозначим проекцию точки через , точки - через , точки - через .



O

l



A

B

C



Тогда

; ; .



Но

.



Теорема 3. Если вектор умножить на число , то его проекция на ось умножится на то же число.



Докажем для случая :



.



Если , то



.



## Литература

1. Артамонов Вячеслав Введение в высшую алгебру и аналитическую геометрию. Изд-во: Факториал, Факториал Пресс, 2007. - 128с.
2. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. Издательство: ФИЗМАТЛИТ®, 2003. - 584c.
3. Клейн Ф. Высшая геометрия. изд. - 2. Издательство: Едиториал УРСС, 2004. - 400c.
4. Клейн Ф., Феликс Христиан Клейн Высшая геометрия: Пер. с нем. Изд.3. ЛИБРОКОМ, 2009. - 400c.