Министерство высшего образования Украины

Национальный Технический Университет Украины

“Киевский политехнический институт”

Кафедра автоматизированных систем обработки информации и управления

К о н т р о л ь н а я р а б о т а

по дисциплине :

“ Теория вероятностей и математическая статистика”

##### Вариант № 24

Выполнил студент гр. ЗІС - 91

ІІI курса факультета ФИВТ

Луцько Виктор Степанович

2009г.

Задача 1

Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что:

а) сумма числа очков не превосходит N;

б) произведение числа очков не превосходит N;

в) произведение числа очков делится на N.

Исходные данные: N=18.

Решение задачи:

Вероятностью случайного события А называется отношение числа равновозможных элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к числу всех равновозможных элементарных событий пространства Е, определяемого данным испытанием.

|  |  |
| --- | --- |
| Р(А) = | m |
| n |

где: n – число всех равновозможных элементарных событий, вытекающих из условий данного испытания;

m - число равновозможных событий, которые благоприятствуют событию А.

а) при сумме числа очков (N = 18), не превосходящих N:

n = 36;m = 36

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Р(А) = | 36 | = | 1 ; |  |
|  | 36 |

б) при произведении числа очков, не превосходящих N:

n = 28;m = 36

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Р(А) = | 28 | = | 7 | ≈ 0,778 ; |  |
|  | 36 | 9 |  |

в) при произведении числа очков, делящихся на N:

n = 3;m = 36

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Р(А) = | 3 | = | 1 | ≈ 0,083 . |
|  | 36 | 12 |

Ответы:

а) Р(А) = 1 ;

б) Р(А) = 7/9 ≈ 0,778 ;

в) Р(А) = 1/12 ≈ 0,083.

Задача 2

Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий i-го сорта равно =1, 2, 3, 4. Для контроля наудачу берутся т изделий. Определить вероятность того, что среди них т1 первосортных, т2, т3 и т4 второго, третьего и четвертого сорта соответственно .



Исходные данные: n1 = 3; n2 = 1; n3 = 6; n4 = 2;m1 = 2; m2 = 1; m3 = 3; m4 = 1.

Решение задачи.

1. Определяем количество способов нужной комбинации:

С′ = Сn1 m1 x Сn2 m2 x Сn3 m3 x Сn4 m4 = С3 2 x С1 1 x С6 3 x С2 1 ;

1. Определяем количество всех возможных способов:

С′′ = Сn1+n2+n3+n4 m1+m2+m3+m4 = С12 7 ;

3) Определяем вероятность Р согласно условия задачи:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Р = | С3 2 x С1 1 x С6 3 x С2 1 | = | 3 х 1 х | 4 х 5 х 6 | х 2 | = |
| 2 х 3 |
| С12 7 | 8 х 9 х 10 х 11 х 12 | | |
| 2 х 3 х 4 х 5 | | |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | = | 3 х 5 | = | 5 | ≈ 0,15 |  |
|  | 9 х 11 | 33 |  |

Ответ: Р = 5/33 ≈ 0,15 .

Задача 3

Среди п лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли т билетов. Определить вероятность того, что среди них выигрышных.



Исходные данные: n = 8; l = 3; m = 5; k = 4.

Решение задачи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k=4** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **n=8** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Общее число случаев, очевидно, равно Сn m , число благоприятных случаев Сk l x Сn-k m-l , откуда:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Р(А) = | *Сk l* x *Сn-k m-l* | = | С4 3 x С8-4 5-3 | = | 3 | ≈ 0, 4286 . |
| *Сn m* | С8 5 | 7 |

## Ответ: Р(А) = 3/7 ≈ 0, 4286 .

## Задача 7

В круге радиуса R наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны S1 и S2. Исходные данные:R =14; S1 = 2,6; S2 = 5,6.

Решение задачи

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S1  **R** |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | P(A) = | **S** | **.** |  |
| S2 |  |  |  |  | **πR2** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P(A1) = | S1 | = | 2,6 | ≈ 0,0042246 ; |  |  |  |  |
| πR2 | 3,14 x 142 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P(A2) = | S2 | = | 5,6 | ≈ 0,0090991 ; |  |  |  |  |
| πR2 | 3,14 x 142 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P(A) = | S1+ S2 | = | 2,6 + 5,6 | = | 8,2 | ≈ 0,013324 . |  |  |
| πR2 | 3,14 x 142 | 615,44 |  |  |

Ответ: Р(А) ≈ 0,013324 .

Задача 8

В двух партиях k1 и k2 % доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них:

а) хотя бы одно бракованное;

б) два бракованных;

в) одно доброкачественное и одно бракованное?

Исходные данные: k1 = 81; k2 = 37.

Решение задачи

События А и В называются независимыми, если выполняется соотношение:

Р(А/В) = Р(А) / Р(В) .

Для любых событий А и В имеет место формула:

Р(А+В) = Р(А) + Р(В) – Р(АВ) .

Обозначения:

Событие А – выбрали бракованное изделие из 1-й партии (1 – k1) ;

Событие B – выбрали бракованное изделие из 2-й партии (1 – k2) .

События А и В – независимые.

а) Р(А+В) = Р(А) + Р(В) – Р(АВ) = (1 – k1) + (1 – k2) – (1 – k1)(1 – k2) =

= 0,19 + 0,63 – 0,19 х 0,63 ≈ 0,82 – 0,12 ≈ 0,70 .

б) Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

Р(А∩В) = Р(А) х Р(В) = (1 – k1)(1 – k2) = 0,19 х 0,63 ≈ 0,12 .

в) Р = Р(А) х Р(В) + Р(В) х Р(А) = (1 – k1)k2 + (1 – k2)k1 =

= 0,19 х 0,37 + 0,63 x 0,81 ≈ 0,07 + 0,51 ≈ 0,58 .

Ответы:

а) ≈ 0,70;

б)≈ 0,12;

в)≈ 0,58.

Задача 9

Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком р1 вторым — р2 . Первый сделал n1, второй — n2 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

Исходные данные: p1 = 0,33; p2 = 0,52; n1 = 3; n2 = 2.

Решение задачи.

Обозначения:

А – вероятность непоражения цели при одном выстреле первым стрелком (1 – р1) ;

В – вероятность непоражения цели при одном выстреле вторым стрелком (1 – р2) ;

Р – цель не поражена в результате общего количества испытаний.

Р = (1 – р1)n1 x (1 – р2)n2 = (1 – 0,33)3 x (1 – 0,52)2 = 0,673 x 0,482 ≈ 0,30 x 0,23 ≈ 0,069 ≈ 0,07 .

Ответ:≈ 0,07 .

Задача 12

Из 1000 ламп ni принадлежат i-й партии, i=1, 2, 3, . В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа — бракованная.



Исходные данные: n1 = 350; n2 = 440.

Решение задачи

Рассмотрим три гипотезы:

Н1 – выбор лампы из первой партии;

Н2 – выбор лампы из второй партии;

Н3 – выбор лампы из третьей партии;

а также событие А – выбор бракованной лампы.

Учитывая то, что Н1, Н2, Н3 – полная группа попарно несовместимых событий, причем Р(Нi) ≠ 0, i = 1,2,3, то для любого события А имеет место равенство (формула полной вероятности):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | 3 |
|  | Р(А) = | ∑ P(Hi) x P(A/Hi) . |
|  |  | i=1 |

Тогда:

P(H1) = 350/1000 = 7/20 ;

P(H2) = 440/1000 = 11/25 ;

P(H3) = 210/1000 = 21/100 .

Р(А) = 7/20 х 0,06 + 11/25 х 0,05 + 21/100 х 0,04 = 42/2000 + 55/2500 + 84/10000 = 514/10000 = 0,0514 .

Ответ: Р(А) = 0,0514 .

Задача 18

На каждый лотерейный билет с вероятностью p1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью р2. — мелкий выигрыш и с вероятностью р3 билет может оказаться без выигрыша, . Куплено n билетов. Определить вероятность получения n1 крупных выигрышей и n2 мелких.



Исходные данные: n = 14; n1 = 5; n2 = 4;p1 = 0,25; p2 = 0,35.

Решение задачи

Для решения данной задачи используем формулу для полиномиального распределения вероятностей, т.к. события – является ли і-тый билет выигрышным (и насколько) или невыигрышным – независимы (для разных і):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Pn(m1,m2,…,mk) = | n! | p1m1 p2m2 … pkmk . |
| m1! m2!…mk! |

В задаче: А1 – билет оказался с крупным выигрышем;

А2 – билет оказался с мелким выигрышем;

А3 – билет оказался без выигрыша.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Р14(5,4,5) = | 14! | х (0,25)5 х (0,35)4 х (0,4)5 = | 6х7х8х9х10х11х12х13х14 | х |
| 5! 4! 5! | 2х3х4х2х3х4х5 |

х 0,0009765 х 0,015 х 0,01024 = 2 х 7 х 9 х 11 х 13 х 14 х 0,0009765 х 0,015 х

х 0,01024 ≈ 0,0378.

Ответ: Р ≈ 0,0378 .

Задача 19

Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна р. Поступило п вызовов. Определить вероятность m «сбоев».

Исходные данные: m = 9; N = 500; p = 0,01.

Решение задачи

q = 1 – p = 1 – 0,01 = 0,99 .

Так как n – большое число (n = N = 500), а npq ≈ 5, т.е. npq < 9 , то применяем формулы Пуассона:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Рn(m) ≈ | *a*m | e-*a* , *a* = np . |
| m! |

Подсчет вручную дает следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Рn(m) ≈ | 59 | х | 1 | ≈ | 58 | х | 1 | ≈ |
| 2х3х4х5х6х7х8х9 | е5 | 2х3х4х6х7х8х9 | 2,75 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ≈ | 390625 | ≈ | 390625 | ≈ 0,03751 . |  |  |
| 72576 х 143,5 | 10 413 862 |  |  |

Но, при известных а = 5 и m = 9 результат формулы Пуассона следует брать из таблицы III, где

Рn(m) ≈ 0,03627 .

Ответ: Рn(m) ≈ 0,03627 .

Задача 20

Вероятность наступления некоторого события в каждом из n независимых испытаний равна р. Определить вероятность того, что число т наступлений события удовлетворяет следующему неравенству.

Варианты 22—31:



Исходные данные: n = 100; P = 0,3; k1 = - ; k2 = 40.

Решение задачи

Вероятность Рn(m) того, что в результате этих n опытов событие А произойдет m раз (наступит m успехов), определяется по формуле Бернулли:

Pn(m) = Cnmpmqn-m, m = 0,1,2,…,n (1)

где q = 1 – p – вероятность наступления противоположного события А при единичном испытании.

Совокупность чисел, определяемых формулой (1), называется биномиальным распределением вероятностей.

При больших значениях п (порядка десятков, сотен) для биномиального распределения применяют следующие приближенные формулы:

(2)



где:



(3)



где:

(4)



(5)



(6)



Формула (2) основана на локальной теореме Муавра—Лапласа, (3) — на интегральной теореме Муавра—Лапласа, (5) и (6) — на формуле Пуассона. Асимптотику Муавра—Лапласа [формулы (2) и (3)] рекомендуется применять в случае, когда npq>9. В противном случае более точные результаты дает асимптотика Пуассона [формулы (5) и (6)].

З а м е ч а н и е 1. Приближенная формула (3) остается в силе и в том случае, когда входящие в нее неравенства являются строгими.

З а м е ч а н и е 2. Вычисления по формулам (2), (3), (5), (6) выполняются с использованием таблиц I—IV соответственно (см. приложение).

В данной задаче n = 100, т.е. n – число большое.

npq = 21, следовательно npq > 9.

При этом q = 1 – p = 0,7 ;np = 30 .

Наши рассуждения приводят к тому, что данную задачу следует решать с помощью формул Муавра-Лапласа, а именно с помощью формулы (3).

Тогда:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k2 – np | ≈ | 40 – 30 | ≈ | 10 | ≈ 2,18 . |  |  |
| √ npq | 4,58 | 4,58 |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k1 – np | ≈ | 0 – 30 | ≈ | -30 | ≈ - 6,55 . |  |  |
| √ npq | 4,58 | 4,58 |  |  |

Pn(m ≤ k2) ≈ Ф(х2) – Ф(х1) ≈ Ф(2,18) – Ф(- 6,55) ≈ Ф(2,18) + Ф(6,55) ≈

≈ 0,48537 + 0,5 ≈ 0,98537 .

Ответ: Pn(m ≤ 40) ≈ 0,98537 .

Задача 21

Дана плотность распределения р (х) случайной величины ξ. Найти параметр γ, математическое ожидание Мξ дисперсию Dξ, функцию распределения случайной величины ξ вероятность выполнения неравенства х1 < ξ < х2

Варианты 17-24:



Исходные данные: a = -1,5; b = 1; x1 = -1; x2 = 1.

Решение.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Р(х) = | ⎨ | *γ, х ∈ [-1,5, 1],* |
| *0, x ∉ [-1,5, 1].* |

Найдем γ. Должно выполняться соотношение:Fξ(+∞) = 1;

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ∫ p(x)dx = 1; |  | ∫ *γ*dx = 1; | *γx* | 1 | = 1; | *γ* \*(1+1,5) = 1; | *γ =* | 1 | =**2/5 .** |
| -1,5 | 2,5 |
| -∞ |  | -1,5 |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 |  |  |  |  |  |  |
| Найдем: *Мξ =* | ∫ х2/5 dx = | 2 х2 | 1 | = | 1/5 (1-2,25) = | -1,25 | = **-0,25 .** |
| 5 2 | -1,5 | 5 |
|  | -1,5 |  |  |  |  |  |  |

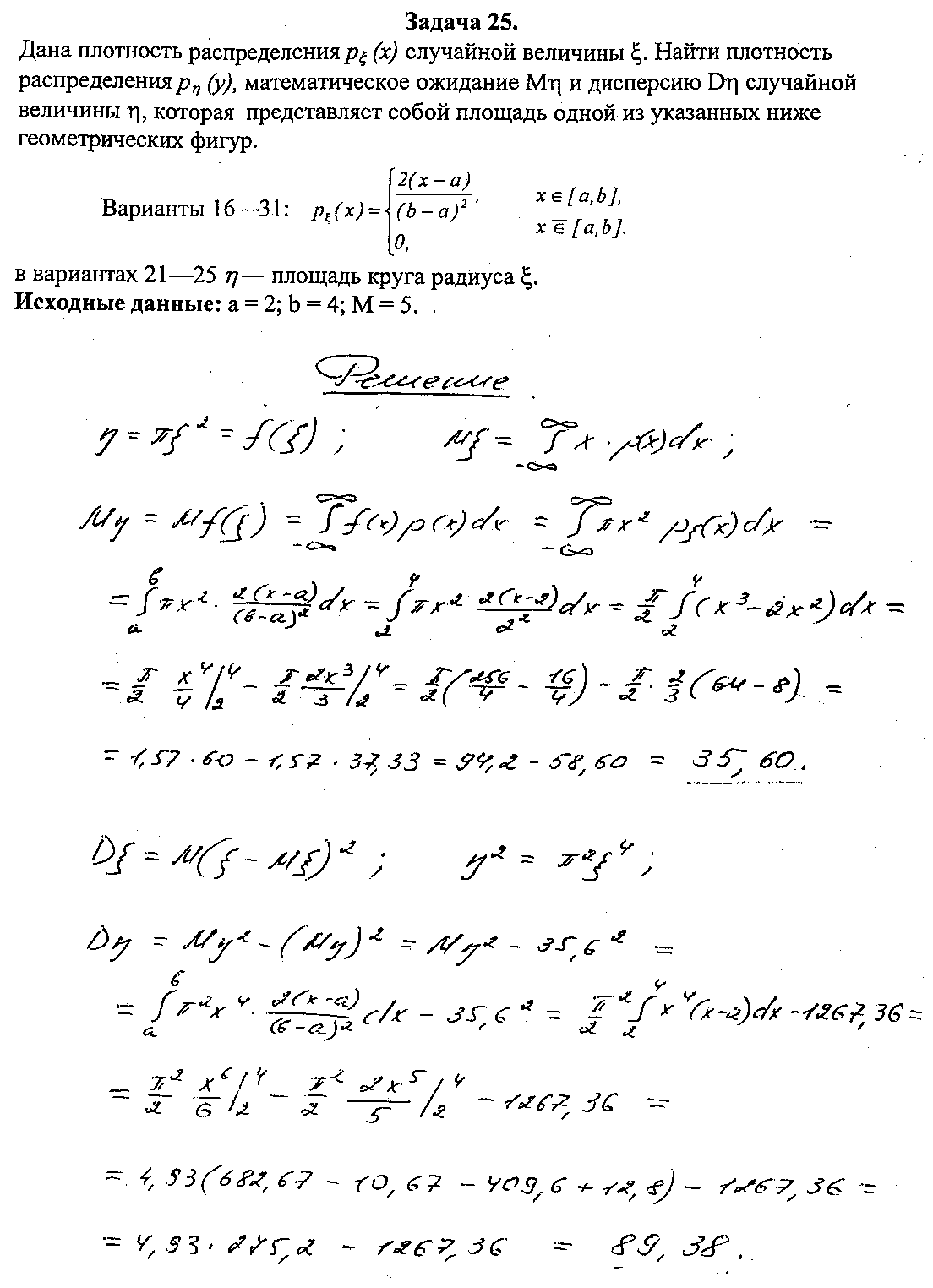
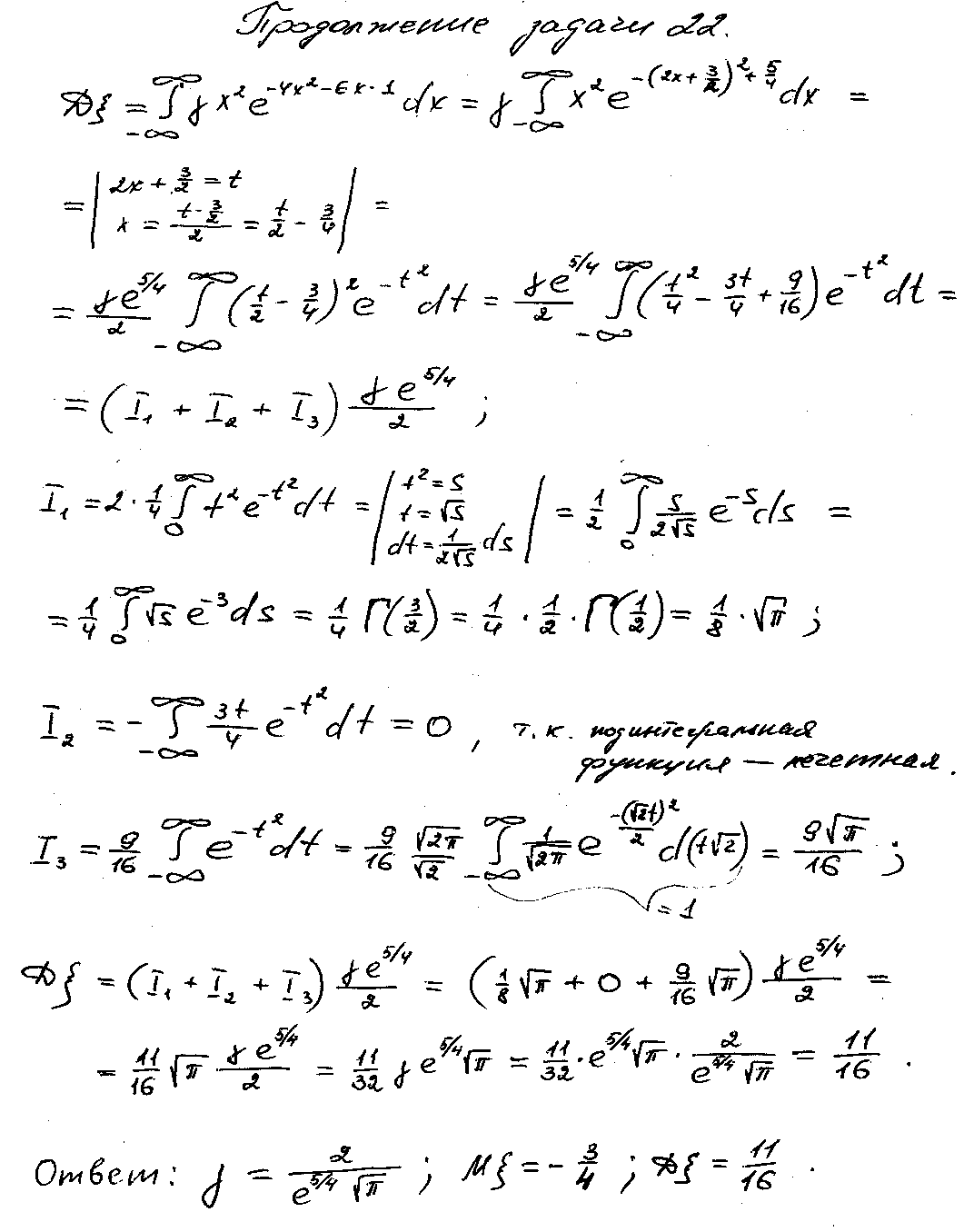
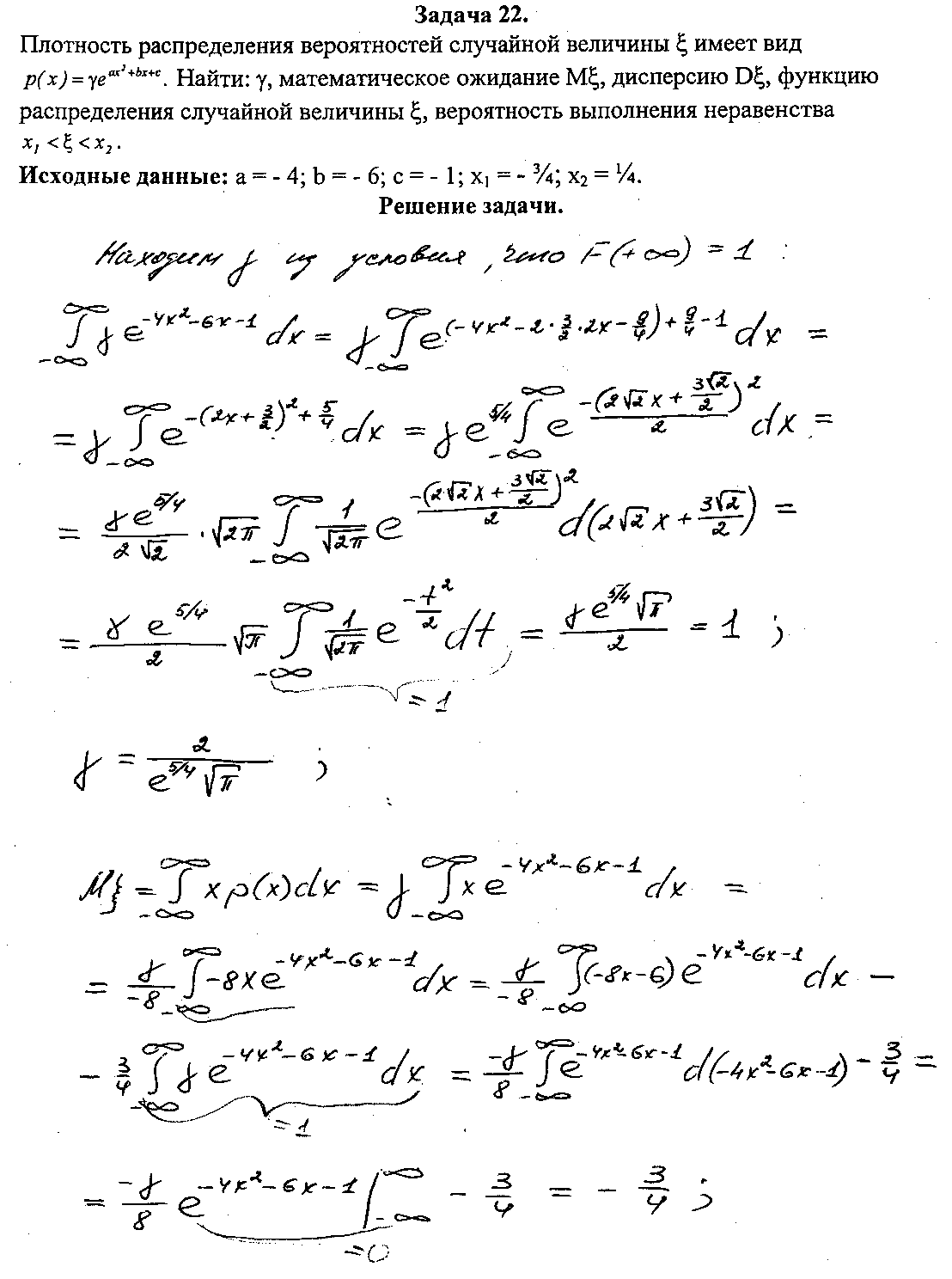
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 |  |  |  |
| Найдем: D*ξ = Мξ2 – (Мξ)2 =* | ∫ 2/5 x2 dx – 0,0625 = 2/5 | x3 | 1 | - 0,0625 = |
| 3 | -1,5 |
|  | -1,5 |  |  |  |

= 2/5 (1/3 + 3,375/3) – 0,0625 = 0,4 \* 1,4583 – 0,0625 = 0,5833 – 0,0625 = 0,5208 .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | |  | | ⎨ | | 0 , | x < -1,5; | | | | |
|  | | | x | | x |  | | | | |
| Найдем: F*ξ (x)=* | | | ∫ p(х) dx = | | ∫ *γ* dt , | -1,5 ≤ x < 1; | | | | |
|  | | | -∞ | | -1,5 |  | | | | |
|  | | |  | | 1 , | x ≥ 1 . | | | | |
| x |  | x | |  | |  | | |  |  |  |
| ∫ *γ* dt = | *γ* t | = | | *γ* x + 1,5*γ =* | | **2/5x + 0,6 .** | | |  |  |  |
| -1,5 |  | -1,5 | |  | |  | | |  |  |  |

Найдем: P{-1<ξ<1} = Fξ (1) - Fξ (-1) = 1 – (-2/5 + 0,6) = 7/5 – 3/5 = 4/5 .

Ответы: 1) γ = 2/5; 2) Мξ = - 0,25; 3) Dξ = 0,5208; 4) Fξ (x) = 0,4x + 0,6; 5) P{-1<ξ<1} = 4/5.



Список использованной литературы

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т.1: Пер.с англ. - М.: Мир, 1994. – 528 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб.для вузов. – 6-е изд.стер. – М.: Высш.шк., 1999. – 576 с.
3. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под редакцией А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1998. – 656 с.
4. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике: Теория вероятностей. – М.: Просвещение, 1998. – 160 с.