**Дисциплина: Высшая математика**

**Тема: Решение произвольных систем линейных уравнений**

**1. Решение произвольных систем линейных алгебраических уравнений**

Выше рассмотрены решения квадратных невырожденных систем линейных алгебраических уравнений матричным методом и методом Крамера. Однако они не пригодны в тех случаях, когда квадратная система уравнений вырождена или когда система вообще не является квадратной.

В связи с этим перейдем к рассмотрению систем линейных алгебраических уравнений общего вида, когда :



В данном случае матрица системы является прямоугольной, у нее нет определителя, и метод Крамера для решения системы не применим. Поэтому, прежде чем решать данную систему, рассмотрим две теоремы.

Теорема 1.1. *Если ранг матрицы совместной системы линейных алгебраических уравнений равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение*.

Доказательство. Если ранг матрицы системы равен , то есть числу неизвестных, то строк у матрицы должно быть тоже . Следовательно, . Итак, по условию . Но тогда любая, не входящая в базисный минор, строка расширенной матрицы является линейной комбинацией базисных строк и может быть обращена в ноль. То же самое происходит и с уравнением, соответствующим этой строке. Значит, исходная система эквивалентна уравнениям с коэффициентами из базисного минора. Остальные уравнений из системы можно убрать, так как они является линейной комбинацией оставшихся. Получаем квадратную невырожденную систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными, которая согласно правилу Крамера имеет единственное решение, что и требовалось доказать.



Теорема 1.2. *Если ранг матрицы совместной системы линейных алгебраических уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений*.

Доказательство. По условию система совместна и . Будем считать, что базисный минор расположен в левом верхнем углу расширенной матрицы системы . Если это не так, то, переставляя строки и столбцы матрицы, можно получить нужный результат.



Минор будет иметь вид:

.



Так как любая строка матрицы , не вошедшая в базисный минор, является линейной комбинацией базисных, то ее можно обратить в ноль. Тогда, по аналогии с теоремой 1.1, из исходной системы можно убрать те уравнения, коэффициенты которых не попали в базисный минор. Следовательно, в ней останется линейных алгебраических уравнений и исходную систему можно записать в виде:



или



Придавая неизвестным произвольные значения , получаем систему из уравнений с неизвестными:



Данная система является квадратной, ее определитель , поэтому с помощью метода Крамера находим единственное решение . Очевидно, задавая другие значения для , получим другие значения неизвестных .



Так как числа могут быть заданы произвольно, то число решений системы бесконечно. Какое-то одно решение будет иметь вид:



.



Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются базисными. Остальные неизвестные называются свободными.

**2. Система однородных линейных алгебраических уравнений**

Важное место среди всех систем линейных алгебраических уравнений занимают однородные системы с произвольными и :



Данные системы всегда совместны, так как обязательно имеют решение вида , которое называется нулевым или тривиальным.



Если , то, согласно теореме 1.1, это решение будет единственным. В частности, в случае однородной невырожденной квадратной системы ее единственное решение будет тривиальным.



В случае, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, то решений, согласно теореме 1.2, будет бесконечное множество. Пусть в этом случае матрицы - столбцы , ,..., являются некоторыми решениями системы:



, ,..., .



Тогда выражение будет называться их линейной комбинацией. Очевидно, что можно ввести понятие линейно зависимой и линейно независимой системы этих решений. Необходимо иметь в виду, что линейная комбинация решений системы линейных алгебраических уравнений также будет ее решением. Действительно,



.



Теорема. *Если ранг матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений меньше числа неизвестных, то есть , то существует линейно независимых решений системы , ,..., , а любые другие решения можно представить как их линейную комбинацию*.



Доказательство. Пусть ранг основной матрицы системы . Тогда базисными неизвестными будут , а остальные неизвестных будут свободными. В этом случае произвольное решение системы можно записать в виде:



.



Здесь – произвольные числа, а однозначно определяются из системы для выбранных .



Рассмотрим следующих решений системы:



, ,..., .



По аналогии с результатом п. 6.3 все они линейно независимы, и произвольное решение системы можно представить в виде:

,



что и требовалось доказать.

Определение. *Фундаментальной системой решений однородной системы линейных алгебраических уравнений называется совокупность всех ее линейно независимых решений*.

Если в фундаментальной системе решений свободные неизвестные по очереди выражаются через единицу, в то время как остальные равны нулю, то такая фундаментальная система решений называется нормированной.

**3. Метод Гаусса**

Для решения произвольных однородных систем линейных алгебраических уравнений удобен метод Гаусса. Основан он на следующем.

При вычислении ранга расширенной матрицы системы линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных преобразований ее приводят к трапецеидальному виду:

.



Но если исходная матрица соответствует исходной системе уравнений, то трапецеидальная матрица будет соответствовать той же системе, но в измененном виде.

Особенность трапецеидальной матрицы заключается в том, что каждая ее последующая строка имеет на один ноль больше и, соответственно, на один коэффициент не равный нулю меньше. Строки, целиком состоящие из нулей, соответствуют исчезнувшим уравнениям. В последней строке будет один коэффициент не равный нулю и, значит, одна неизвестная в уравнении для определенной системы. В случае неопределенной системы в последнем уравнении будет одна базисная переменная и несколько свободных.

Находя эту базисную неизвестную из последнего уравнения, переходим затем к предпоследней строке и соответствующему ей уравнению и находим следующую базисную неизвестную. Эта операция повторяется до первой строки. После вычисления всех базисных неизвестных составляется нормированная фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

**4. Решение неоднородных систем линейных алгебраических уравнений**

Выясним, чем отличается решение произвольной неоднородной системы алгебраических уравнений от решения однородной системы.

Определение. *Однородная система линейных алгебраических уравнений называется соответствующей неоднородной системе, если коэффициенты при неизвестных у них одинаковые, а свободные члены неоднородной системы заменены нолями.*

Рассмотрим произвольную совместную неоднородную систему линейных алгебраических уравнений:



Пусть у нее в общем случае , то есть имеется бесконечное множество решений.



Теорема 4.1. *Сумма любого решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений с любым решением соответствующей ей однородной системы является решением неоднородной системы*.

Доказательство. Возьмем произвольное решение неоднородной системы



и произвольное решение соответствующей ей однородной системы

.



Рассмотрим их сумму .



Если данная сумма является решением неоднородной системы, то она должна превратить в тождество любое ее уравнение:



что и требовалось доказать.

Теорема 4.2. *Разность любых двух решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений является решением соответствующей однородной системы*.

Доказательство. Возьмем два произвольных решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений:

и .



Составим их разность .



Подставим полученную разность в любое уравнение неоднородной системы:



Так как левая часть уравнения обратилась в ноль, значит, является решением однородной системы, что и требовалось доказать.



Из теоремы 4.2 следует, что если , то . Иначе говоря, взяв какое-то одно решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и прибавляя к нему разные решения соответствующей однородной системы , получим разные решения неоднородной системы, что подтверждается теоремой 4.1.



Следствие. *Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений равно сумме какого-то частного ее решения и общего решения соответствующей однородной системы*.

**Литература**

1. Краснов М. Вся высшая математика т.1 изд.2. Едиториал УРСС, 2003. – 328с.
2. Мироненко Е. С. Высшая математика. М: Высшая школа, 2002. – 109с.
3. Черненко В. Д. Высшая математика в примерах и задачах. В трех томах. ПОЛИТЕХНИКА, 2003.
4. Шипачев В. С. Высшая математика изд.7 Изд-во: ВЫСШАЯ ШКОЛА, 2005. – 479с.