Гомельская научно-практическая конференция школьников по математике, ее приложениям и информационным технологиям «Поиск»

**Реферат на тему:**

**«Медианы треугольника»**

Учеников:

9' класса государственного

учреждения образования

«Гомельская городская

Многопрофильная гимназия № 14»

Морозовой Елизаветы

Ходосовской Алеси

Научный руководитель-

Учитель математики высшей категории

Сафонова Алла Викторовна

Гомель 2009

**Оглавление**

Введение

1. Медианы треугольника и их свойства
2. Открытие немецкого математика Г. Лейбница
3. Применение медиан в математической статистике
4. Медианы тетраэдра
5. Шесть доказательств теоремы о медианах

Заключение

Список использованных источников и литературы

Приложение

**Введение**

Геометрия начинается с треугольника. Вот уже два тысячелетия треугольник является как бы символом геометрии, но он не символ. Треугольник – атом геометрии.

Треугольник неисчерпаем – постоянно открываются его новые свойства. Чтобы рассказать о всех известных его свойствах, необходим том сравнимый по объему с томом Большой энциклопедии. Мы хотим рассказать о медиане треугольника и ее свойствах, а так же о применении медиан.

Сначала вспомним, что медиана треугольника – это отрезок соединяющий вершины треугольника с серединой противоположной стороны. Медианы имеют множество свойств. Но мы рассмотрим одно свойство и 6 различных его доказательств. Три медианы пересекаются в одной точке, которая называется центроидом (центром масс) и делятся в отношении 2:1.

Существует медианы не только треугольника, но и тетраэдра. Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом (точкой пересечения медиан) противолежащей грани называется медианой тетраэдра. Мы так же рассмотрим свойство медиан тетраэдра.

Медианы используются в математической статистике. Например, для нахождения среднего значения некоторого набора чисел.

1. **Медианы треугольника и их свойства**

Как известно, медианами треугольника называются отрезки, соединяющие его вершины с серединами противоположных сторон. Все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 1:2.

Точка пересечения медиан является также центром тяжести треугольника. Если подвесить картонный треугольник в точке пересечения его медиан то он будет находиться в состоянии равновесия

Любопытно, что вcе шесть треугольников, на которые всякий треугольник разбивается своими медианами, имеют одинаковые площади.

Медианы треугольника через его стороны выражаются так:

,



,



.



Если две медианы перпендикулярны, то сумма квадратов сторон, на которые они опущены, в 5 раз больше квадрата третьей стороны.

Построим треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника, тогда медианы построенного треугольника будут равны 3/4 сторон первоначального треугольника.

Данный треугольник назовем первым, треугольник из его медиан - вторым, треугольник из медиан второго - третьим и т. д. Тогда треугольники с нечетными номерами (1,3, 5, 7,...) подобны между собой и треугольники с четными номерами (2, 4, 6, 8,...) также подобны между собой.

Сумма квадратов длин всех медиан треугольника равняется ¾ суммы квадратов длин его сторон.

**2. Открытие немецкого математика Г. Лейбница**

Знаменитый немецкий математик ***Г. Лейбниц*** обнаружил замечательный факт: сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до вершин треугольника, лежащего в этой плоскости, равняется сумме квадратов расстояний от точки пересечения медиан до его вершин, сложенной с утроенным квадратом расстояния от точки пересечения медиан до выбранной точки.

Из этой теоремы следует, что точка на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до вершин данного треугольника является минимальной,- это точка пересечения медиан этого треугольника.

В то же время минимальная сумма расстояний до вершин треугольника (а не их квадратов) будет для точки, из которой каждая сторона треугольника видна под углом в 120°, если ни один из углов треугольника не больше 120° (точка Ферма), и для вершины тупого угла, если он больше 120°.

Из теоремы Лейбница и предыдущего утверждения легко найти расстояние *d* от точки пересечения медиан до центра описанной окружности. Действительно, это расстояние по теореме Лейбница равно корню квадратному из одной трети разности между суммой квадратов расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника и суммой

Квадратов расстояний от точки пересечения медиан до вершин треугольника. Получаем, что

.



Точка *М* пересечения медиан треугольника AВС является единственной точкой треугольника, для которой сумма векторов *МА, MB и МС* равна нулю. Координаты точки *М* (относительно произвольных осей) равны средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника. Из этих утверждений можно получить доказательство теоремы о медианах.

**3. Применение медиан в математической статистике**

Медианы бывают не только в геометрии, но и в математической статистике. Пусть нужно найти среднее значение некоторого набора чисел ,, ..., *ап.* Можно, конечно, за среднее принять среднее арифметическое



Но иногда это неудобно. Допустим, что нужно определить средний рост второклассников Москвы. Опросим наугад 100 школьников и запишем их рост. Если один из ребят в шутку скажет, что его рост равен километру, то среднее арифметическое записанных чисел окажется слишком большим. Гораздо лучше в качестве среднего взять *медиану* чисел *,* ..., *ап.*



Предположим, что чисел - нечетное количество, и расставим их в неубывающем порядке. Число, оказавшееся на среднем месте, называется медианой набора. Например, медиана набора чисел 1, 2, 5, 30, 1, 1, 2 равна 2 (а среднее арифметическое значительно больше - оно равно 6).

**4. Медианы тетраэдра**

Оказывается, можно говорить о медианах не только для треугольника, но и для тетраэдра. Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом (точкой пересечения медиан) противолежащей грани, называется **медианой** **тетраэдра**. Как и медианы треугольника, медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, центре масс или центроиде тетраэдра, но отношение, в котором они делятся в этой точке, иное – 3:1, считая от вершин. Эта же точка лежит и на всех отрезках, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, его бимедианах, и делит их пополам. Это можно доказать, например, из механических соображений, поместив в каждую из четырех вершин тетраэдра грузики единичной массы.

**5. Шесть доказательств теоремы о медианах**

Давно замечено, что познакомиться с разными решениями одной задачи бывает полезнее, чем с однотипными решениями разных задач. Одной из теорем, допускающих, как и многие другие классические теоремы элементарной геометрии, несколько поучительных доказательств, является

Теорема о медианах треугольника. *Медианы , В и С треугольника ABC пересекаются в некоторой точке М, причем каждая из них делится этой точкой в отношении* 2:1, *считая от вершины: AM:M=BM:M=CM:M=2.*(1)



Во всех приводимых далее доказательствах, кроме шестого, мы устанавливаем только, что *медиана В проходит через точку М, которая делит медиану А в отношении* 2:1. Если в соответствующем рассуждении заменить отрезок *В* на отрезок *С,* то мы получим, что и *С* проходит через *М.* Этим будет доказано, что все три медианы пересекаются в некоторой точке *М,* причем *АМ:М - 2.* Поскольку все медианы равноправны, можно заменить *А* на *В* или *СС1* отсюда вытекает (1).



***Первое доказательство (8 класс).***

Пусть *К* - середина отрезка *AM, В'* - точка пересечения прямой *ВМ* со стороной *АС.* Нам достаточно доказать, что *АВ' = В'С.* Через точки *К* и параллельно прямой *ВМ* проведем отрезки *KL* и *N* (рис. 1). Поскольку *АК - КМ = М* и *С=В,* по теореме Фалеса получаем



*AL=LB' = B'N=;NC.*

*АВ'=В'С.*

***Второе доказательство(8 класс).***

Рассмотрим гомотетию с центром М и коэффициентом -1/2. Точка *А* переходит при этой гомотетии в *.* Пусть *В* переходит в *В'* (рис. 2). Тогда  *=* - *АВ.* С другой стороны, средняя линия получается из стороны *ВА* при гомотетии с центром *С* и коэффициентом 1/2; таким образом:



=



Итак, *,* следовательно, В'=. Таким образом, треугольники *ABC* и гомотетичны, причем центр гомотетии лежит в точке М. По определению гомотетии, точки В, *М* и *В' =* лежат на одной прямой.



***Третье доказательство(9 класс).***

Рассмотрим треугольники *MAC* и *МС* (рис. 3). Их высоты, опущенные из вершины С, совпадают, а длины противолежащих этой вершине сторон относятся как 2:1, поэтому *,* где S обозначает площадь. Аналогично, . Но *.* Следовательно,



*.* Таким образом, треугольники *МАВ, МВС* и *МСА* равновелики. Пусть *В'* - точка пересечения прямых *ВМ* и *АС.* Докажем, что *АВ' = В'С.* С одной стороны,



С другой стороны,



.



Пользуясь теоремой

,



отсюда получаем



.



***Четвертое доказательство (9 класс).***

ВМ= *ВС + СА+АМ=ВС + СА+*



Следовательно, точка *М* лежит на медиане *.*



***Пятое доказательство (9 класс).***

Опять рассмотрим точку *В'* пересечения прямых *ВМ* и *АС* (рис. 3). Применяя теорему синусов сначала к треугольникам *АВ'В* и *СВ'В,* а затем - к треугольникам *АВМ* и *ВМ* и учитывая, что sin *AB'B=* sin *CB'B,* sin *AMB=* = sin*MB,* BC=2B и *МА =*2M, получим



.



***Шестое доказательство(10 класс).***

Проведем через точки *А* и *В* плоскость а, не содержащую С, и построим в этой плоскости правильный треугольник *ABC* (рис. 5). Из общих свойств параллельной проекции следует, что параллельная проекция вдоль прямой *С* переводит треугольник*АВС* в треугольник *АВ,* причем медианы треугольника *ABC* проектируются в медианы треугольника *AB.* Но в правильном треугольнике медианы являются и биссектрисами, а следовательно, пересекаются в одной точке. Легко доказать также (докажите!), что для треугольника *AB* справедливы равенства (1).



Отсюда вытекает, что наша теорема верна и для треугольника АВС.

Упомянем еще одно, быть может, самое простое и естественное доказательство теоремы о медианах: если поместить в вершины треугольника равные массы и поочередно группировать их парами, мы получим, что центр всех трех масс лежит на каждой из медиан. Центр системы равных масс, помещенных в некоторые точки, называется центроидом этого набора точек, поэтому и точку пересечения медиан треугольника часто называют его центроидом.

**Заключение**

Исходя из проделанной работы можно сделать следующие выводы:

1. Одну теорему можно доказать разными способами. Это гораздо полезнее. Ведь ее можно изучить с разных сторон, используя различные методы и темы курса 8-10 классов.

2. Медиана была изучена многими учеными, но особый вклад в ее развитие внес немецкий ученый Г. Лейбниц. Он обнаружил замечательный факт: сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до вершин треугольника, лежащего в этой плоскости, равняется сумме квадратов расстояний от точки пересечения медиан до его вершин, сложенной с утроенным квадратом расстояния от точки пересечения медиан до выбранной точки.

Из этой теоремы следует, что точка на плоскости для которой сумма квадратов расстояний до вершин данного треугольника является минимальной, - это точка пересечения медиан этого треугольника.

3. Медианы используются не только в геометрии, но и в физике, и в статической математике. Для вычисления среднего арифметического и др.

**Список использованных источников и литературы**

1. И.Л. Никольская. Факультативный курс по математике. Учебное пособие для 7-9 классов средней школы. Москва “Просвещение” 1991 г. с. 92-93.
2. Т.Л. Рыбакова, И.В. Суслова. Школьный справочник “МАТЕМАТИКА”. Ярославль “Академия развития” 1997 г. с. 113.
3. Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук литературы. “ Квант № 7 1990 г. с. 40.
4. Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук литературы. “ Квант № 1 1990 г. с. 54.

**Приложение**

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Вывести отсюда теорему о медианах.
2. Дан треугольник *ABC*. Укажите все такие точки *P*, что *SPAB = SPBC =SPCA*.
3. Каждая из вершин пятиугольника соединена с серединой противолежащей стороны. Докажите, что если четыре из полученных прямых пересекаются в одной точке, то и пятая прямая проходит через эту точку.
4. Через каждое из ребер трехгранного угла и биссектрису противоположного плоского угла проведена плоскость. Докажите, что три полученные плоскости имеют общую прямую.
5. Точки *A*1, *B*1, *C*1 лежат соответственно на сторонах *BC,* CA и *AB* треугольника *ABC*. Известно, что отрезки *AA*1, *BB*1, *CC*1 пересекаются в точке *P*, причем



Докажите, что *P* - центроид треугольника *ABC*.