Министерство образования Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г.В.Плеханова

(технический университет)

**Математическое моделирование и расчет систем управления техническими объектами**

*Учебное пособие*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2002

УДК 681.51(075.8)

ББК 30в6

Б82

**Авторы:**

**Б.М. Борисов, В.Е. Большаков, В.И. Маларёв, Р.М. Проскуряков**

Изложены основные характеристики систем управления техническими объектами и принципы построения математических моделей таких систем. Рассмотрены разновидности и методы динамического моделирования технологических объектов с позиций исследования их в системах управления. Отмечены особенности построения моделей на базе линейных и нелинейных элементов систем управления.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения специальности 180400 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов» и может быть использовано студентами других специальностей для курсового и дипломного проектирования

Рецензент к.т.н. *А.А.Сарвин* (Северо-Западный государственный заочный технический ун-т).

**Математическое моделирование и расчет систем управления техническими объектами:**

Б82 Учебное пособие /Б.М.Борисов, В.Е.Большаков, В.И.Маларёв, Р.М.Проскуряков; Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет). СПб, 2002. 63 с.

ВВЕДЕНИЕ

Современное горное производство характеризуется достаточным арсеналом средств автоматизации и управления. Для их рационального использования необходимо определить и реализовать оптимальные параметры автоматических систем и регуляторов. Определение оптимальных параметров возможно на стадии проектирования путем изучения поведения моделей управляемых технологических установок, процессов.



В процессе изучения дисциплины «Математическое моделирование и расчет систем управления техническими объектами» анализируются функциональные схемы управления технологических процессов, определяются взаимосвязи между подсистемами, ограничения, критерии управления. Рассматриваются статические и динамические режимы работы машин, установок и их математическое описание. Изучаются особенности методов исследования математических моделей, имеющих нелинейные зависимости, трансцендентные уравнения.

1. Математические модели систем управления

1.1 Операторы преобразования переменных

Рассмотрение причинно-следственного взаимодействия системы управления со средой связано с обособлением собственно системы *S* и выделением ее связей со средой через переменные входа *f* и выхода *у* (рис.1).

Система оказывается звеном в искусственно разорванной цепи причинно-следственных отношений «среда – система – среда».

На содержательном уровне объекты и системы управления интерпретируются как устройства получения, передачи и обработки информации. С другой стороны, объекты и системы можно рассматривать как преобразователи сигналов – носителей этой информации. Преобразование сводится к изменению параметров, кодирующих информацию. Свойства системы как преобразователя характеризуются ее *оператором*, отображающим множество функций времени на входе системы на множество функций выхода:

.



Оператор *линеен*, если обладает свойствами *однородности* и *аддитивности*, т. е.



В общем случае линейной комбинации входных воздействий отвечает та же линейная комбинация соответствующих реакций:



Свойство линейности оператора, выраженное приведенной формулой, иногда называют *принципом суперпозиции*. Принцип суперпозиции дает возможность выражать реакцию линейной системы на любое воздействие через ее реакцию на определенный вид элементарных воздействий *fi*(*t*).

При построении моделей стремятся к их простоте при максимальной адекватности оригиналам. В частности, принимают гипотезу о линейности оператора, что принципиально упрощает анализ и синтез.

Если принцип суперпозиции не выполняется, то оператор называется *нелинейным.* Разумеется, класс нелинейных операторов много богаче класса линейных.

Оператор *стационарен*, если его характеристики инвариантны ко времени. Другими словами, при сдвиге во времени входного воздействия без изменения его формы реакция претерпевает такой же сдвиг во времени без изменения своей формы. В ряде случаев модели должны отражать изменение свойств объекта во времени, тогда вводятся в рассмотрение *нестационарные* операторы



Нестационарность оператора учитывает воздействие среды принципиально иного характера, чем сигнальный вход *f*(*t*)*.* В простейшем случае нестационарность сводится к изменению *параметров* модели, например коэффициентов дифференциального уравнения. В общем случае влияние среды приводит к необходимости изменения *структуры* оператора, например порядка дифференциального уравнения.

Если вариации оператора происходят много медленнее основных процессов, то вместо нестационарного оператора рассматривают множество стационарных операторов, различающихся значениями параметров. Описание объекта множеством равновероятных операторов содержит *неопределенность*. Если параметры модели заданы с точностью до интервалов значений, то о таких системах говорят, что они *интервальные*.

Оператор может быть *детерминированным* или *стохастичным*. В случае стохастичных операторов параметры представляются как случайные величины и задаются их вероятностные характеристики.

Объекты управления могут быть с *сосредоточенными* или *распределенными* параметрами. В последнем случае они описываются уравнениями в частных производных (разностях).

1.2 Классы моделей

Модель объекта или системы управления принадлежит тому же классу, что и описывающий их оператор преобразования. Выделяют следующие признаки классов систем с непрерывным и дискретным временем:

• линейные Л или нелинейные Л;

• стационарные С или нестационарные С;

• детерминированные Д или стохастичные Д;

• сосредоточенные (конечномерные) К или распределенные (бесконечномерные) К.

Эти четыре независимых признака биальтернативны, поэтому можно насчитать всего 24 = 16 классов непрерывных и столько же дискретных систем.

Простейший класс – ЛСДК – линейные стационарные детерминированные конечномерные системы. Они имеют форму обыкновенных линейных дифференциальных (разностных) уравнений с постоянными детерминированными коэффициентами. Математика разработала весьма развитый аппарат анализа этого класса систем.

Более сложные классы операторов получаются при введении одного из альтернативных признаков:

ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК.

Для таких систем существует незначительное число общих методов аналитического исследования, разработанных только для частных случаев. Операторы второго уровня сложности получаются введением двух отрицаний:

ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК.

При трех отрицаниях получаем операторы третьего уровня сложности:

ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК.

Операторы четвертого уровня сложности – ЛСДК – нелинейные нестационарные стохастичные бесконечномерные. Им соответствуют нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных с переменными случайными параметрами.

Для систем, описываемых операторами второго и выше уровней сложности, имеется, как правило, только единственная возможность их анализа и синтеза путем вычислительных экспериментов.

Если модель системы образована элементами различных классов, то класс системы определяется классом элемента с максимальным числом отрицаний.

Система называется *автономной*, если на нее не действуют внешние силы, в том числе параметрического типа. Автономные системы, таким образом, стационарны. Изменение их состояния происходит в силу накопленной ранее энергии. На рис.2 модель среды представлена в виде автономной системы, имеющей выходы, но не имеющей входов. Движения автономной системы называют *свободными.*

Дифференциальные уравнения автономных систем включают переменные системы и их производные, но не содержат переменных, описывающих воздействия среды, и имеют постоянные параметры. Это так называемые *однородные* дифференциальные уравнения

*в*

*б*

*а*

Рис.2. Графическое представление физических

систем с сосредоточенными параметрами

,



дополняемые начальными условиями



Начальные условия являются следствием предыстории системы и вместе с дифференциальными уравнениями полностью определяют поведение автономной системы. В случае автономных систем с дискретным временем будем иметь однородные *разностные* уравнения:

.



Среда на входе системы моделируется автономными системами – *генераторами* воздействий или преобразователями типовых воздействий – *фильтрами.* Распространенными типовыми сигналами, моделирующими детерминированное воздействие, являются единичные импульсная и ступенчатая функции. Примером типового случайного воздействия является так называемый «белый шум». Среда может моделироваться динамической системой того же класса, что и сама система управления. Однако часто рассматриваются детерминированные системы со случайными воздействиями на входе.

1.3. Способы построения моделей

В зависимости от характера и объема априорной информации об объекте исследования выделяют два способа построения моделей систем управления в формах, принятых в теории управления: аналитический и экспериментальный.

*Аналитический способ* применяется для построения моделей объектов хорошо изученной природы. В этом случае имеется вся необходимая информация о свойствах объекта, но она представлена в другой форме. В результате идеализации физических объектов появляются структурные модели в виде *схем с сосредоточенными компонентами* (рис.2, *а*). Типичными представителями физических систем, допускающих такое представление, являются электрические и механические объекты. На рис.2, *б* изображена электрическая схема; рис.2, *в* представляет собой пример механической поступательной системы.



Подобные схемы являются моделями, в которых информация об интересующих свойствах объекта представлена в наглядной форме с использованием графических образов, отражающих физическую природу явлений, устройство и параметры объектов. На таких моделях базируются соответствующие дисциплины, например, теоретическая электротехника и теоретическая механика. Принципиальные схемы – стационарные линейные модели с сосредоточенными компонентами.

Методы теории управления абстрагируются от конкретной природы объектов и оперируют более общими – математическими (символьными) моделями.

Аналитический способ моделирования складывается из этапа построения схемы объекта и ее дальнейшего преобразования в математическое описание требуемой формы. При этом принципиальные проблемы моделирования решаются на первом – неформальном этапе. Второй этап оказывается процедурой преобразования форм представления моделей. Это дает возможность разработать различные компьютерные программы, позволяющие автоматизировать составление уравнений по схемам.

Рассмотрим примеры составления дифференциальных уравнений электрического и механического объектов. Ограничимся классом линейных стационарных моделей.

Существуют три типа пассивных электрических двухполюсников – сопротивление *R*, емкость *С* и индуктивность *L*, описываемые следующими уравнениями для токов *i*(*t*) и напряжений *u*(*t*):



;



Активными двухполюсниками электрических схем являются *источник* *напряжения* и *источник тока*.

Уравнения связи двухполюсников в конкретной схеме выражаются законами Кирхгофа, представляющими собой условия непрерывности токов и равновесия напряжений:

• первый закон – сумма токов в любом узле равна нулю;

• второй закон – сумма напряжений в любом контуре равна нулю.

Рассмотрим пример электрической схемы, изображенной на рис.2, *б*. Пусть выходом схемы является напряжение на емкости . В соответствии с первым законом имеем:



.



Второй закон для единственного контура запишется так:

.



Выражая напряжения и через :



; ,



получим дифференциальное уравнение второго порядка

.



Рассмотрим механическую систему (рис.2, *в*). Пассивными двухполюсниками механических схем являются механическое сопротивление *В*, масса *М* и упругость *K*, описываемые следующими уравнениями для сил *f* и перемещений *x* или скоростей *v*:

;



;



.



Идеальными источниками механической энергии являются *источник скорости* и *источник силы*. Уравнения связей механических двухполюсников выражают условия равновесия сил и непрерывности перемещений (скоростей). В соответствии с приведенными ранее уравнениями механических двухполюсников и уравнениями связей записывают дифференциальное уравнение для перемещений:

.



В этом однородном уравнении отсутствует правая часть, описывающая внешнее воздействие на механическую систему, т. е. она автономна. Свободные движения автономной системы являются следствием ненулевых начальных условий, например начального смещения *х*(0) от равновесного состояния.

При моделировании объектов различной природы – электрической, механической поступательной и вращательной, гидравлической или пневматической и др., а также смешанной природы, например электромеханической (двигатели, генераторы), могут быть выделены аналогичные пассивные и активные компоненты. Дальнейшей абстракцией при построении моделей физических объектов с сосредоточенными компонентами является *полюсный граф*. Эти универсальные топологические модели позволяют унифицировать составление уравнений. Специфика предметной области проявляется только на этапе построения схемы и полюсного графа, а также на заключительном этапе интерпретации результатов анализа и синтеза.



Рис.3. Схема экспериментального исследования объекта

При проектировании систем управления, когда некоторые элементы реально не существуют, аналитический метод построения моделей оказывается единственно возможным.

Если свойства объекта познаны в недостаточной степени, либо происходящие явления слишком сложны для аналитического описания, для построения математических моделей реально существующих объектов применяется *экспериментальный* способ, который заключается в активных экспериментах над объектом или в пассивной регистрации его поведения в режиме нормальной эксплуатации (рис.3, *а*). В результате обработки данных наблюдений получают модели в требуемой форме. Совокупность этих операций объединяется термином *идентификация объекта*. В результате идентификации получаются модели вход-выход (рис.3, *б*). Модель зависит не только от свойств объекта, но также от входных сигналов, их разнообразия.

Практически об идентифицируемом объекте всегда имеется какая-то априорная информация, т. е. он не является «черным ящиком». Это дает возможность комбинировать оба способа – вначале аналитически строить структуру модели и определять начальные приближенные значения параметров, а далее обработкой экспериментальных данных уточнять их значения.

1.4. Особенности структурных моделей систем управления

Особенностью математических моделей систем управления является то, что они не только содержат априорную информацию о ее динамических свойствах, необходимую для изучения поведения системы в целом, но также отражают процессы получения и обработки текущей информации о цели системы, состоянии объекта и воздействиях среды для принятия решения по оказанию на объект надлежащего управляющего воздействия. Поскольку модели элементов и систем являются основным материалом в задачах анализа и синтеза (исходными данными и результатами), то им и алгоритмам их преобразования в теории управления отводят важное место.

Понятие модели системы управления неотделимо от понятия структуры. Под *структурой* систем управления понимают *причинно-следственные взаимосвязи элементов* (*подсистем*) *направленного действия*. Именно ориентированность элементов и их взаимосвязей отличает модели систем управления от структурных моделей физических систем.

При построении моделей с раскрытой причинно-следственной структурой объект или систему предварительно расчленяют на элементы направленного действия и рассматривают их как преобразователи сигналов. Элементы выделяются, как правило, по функциональному признаку, причем сами эти функции понимаются в контексте операций управления: объект управления; измерительные, преобразовательные и усилительные элементы; управляющее устройство; исполнительный механизм; управляющий орган. Далее для каждой части строится своя модель, а затем модели частей связывают между собой таким же образом, как соединялись сами части.

Если части системы образуют контуры, то моделирование по частям встречается с принципиальной проблемой: не зная свойств частей, нельзя описать сигналы на их входах; не зная сигналов, нельзя правильно идентифицировать отдельные части. Достоинство моделирования по частям заключается в наглядности механизма преобразования входов в выходы.

2. Линейные модели и характеристики систем управления

2.1 Модели вход-выход

Основными формами представления конечномерных линейных непрерывных стационарных детерминированных операторов преобразования входных переменных *f*(*t*) в переменные выхода *y*(*t*) являются: дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики*.* Для одномерных систем переменные *f*(*t*) *и y*(*t*) являются скалярами. Эти и некоторые другие представления операторов рассматриваемого класса моделей могут быть приняты за основу задания динамических свойств в терминах вход-выход. Если для конкретных исследований та или иная форма оказывается более предпочтительной, ставится и решается задача перехода от одной формы к другой, например задача построения временных и частотных характеристик по дифференциальному уравнению или передаточной функции.

*Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение* *n*-порядка с постоянными коэффициентами обычно записывается так:

(1)



Если ввести оператор дифференцирования по времени , то уравнение (1) запишется в компактном виде:



*A*(*p*)*y*(*t*) = *B*(*p*)*f*(*t*), (2)

где *A*(*p*) *= anpn + …… + a*1*p + a*0*; B*(*p*) *= bmpm + …… + b*1*p + b*0 *–* операторные полиномы. Дифференциальное уравнение дополняется начальными условиями .



*Передаточная функция* равна отношению изображений по Лапласу переменных выхода и входа при нулевых начальных условиях *W*(*s*)*=Y*(*s*)*/F*(*s*), где интегральное преобразование Лапласа определяется так:



Преобразуя дифференциальное уравнение (1) при нулевых начальных условиях, получаем алгебраическое уравнение для изображений:

*A*(*s*)*Y*(*s*) = *B*(*s*)*F*(*s*).

Отсюда следует, что передаточная функция легко записывается по дифференциальному уравнению

*W*(*s*) *= B*(*s*)*/A*(*s*) (3)

и, наоборот, по передаточной функции сразу записывается дифференциальное уравнение.

Зная передаточную функцию и изображение переменной входа, легко найти изображение выхода

*Y*(*s*) = *W*(*s*)*F*(*s*).

***Пример.*** Пусть система описывается дифференциальным уравнением второго порядка:



Преобразуем это уравнение по Лапласу, для чего воспользуемся свойством линейности оператора преобразования *L*, а также теоремой о дифференцировании оригинала:

*a*2(*s*2*Y*(*s*) – *sy*(0) – *y*′(0)) + *a*1(*sY*(*s*) – *y*(0)) + *a*0*Y*(*s*) = *b*0*F*(*s*).



Последнее уравнение перепишем в следующем виде:

(*a*2*s*2 + *a*1*s* + *a*0)*Y*(*s*) = *b*0*F*(*s*) + *a*2*sy*(0) + *a*2*y*'(0) + *a*1*y*(0).

При нулевых начальных условиях *y*(0) *=* *y*'(0) *=* 0 отношение изображений, т.е. передаточная функция



Оператор, связывающий вход и выход, можно задать коэффициентом и множествами нулей (корней полинома) *zj*; *j =* 1, …, *m* и полюсов (корней полинома знаменателя) *pi*; *i =* 1, …, *n.* Передаточная функция будет равна:

(4)



В отличие от *полиномиальной* формы (3) форму задания передаточных функций (4) иногда называют *факторизованной.*

Вводится понятие структуры оператора преобразования. Для дифференциального уравнения *n*-го порядка (1) и передаточной функции (3) задание структуры означает задание целых чисел – степеней *n =* deg *A* и *m =* deg *B* – полиномов *А* и *В*.

Параметрамиоператора являются коэффициенты полиномов.

*Временные характеристики* являются одной из форм представления операторов преобразования переменной *f*(*t*) в переменную *y*(*t*). Импульсная переходная функция, или функция веса *w*(*t*) – реакция системы на единичный идеальный импульс (рис.4, *а*) при нулевых начальных условиях. переменная выхода определяется как интеграл свертки:



(5)



т.е. в этом случае оператор преобразования имеет форму интегрального уравнения.

Другая часто употребляемая временная характеристика – переходная (рис.4, *б*) характеристика *h*(*t*) – реакция системы на единичную ступенчатую функцию1(*t*) при нулевых начальных условиях. На рис.4 приведен примерный вид временных характеристик для системы второго порядка.



*Частотные характеристики* элементов и систем представляют собой зависимость параметров установившихся реакций на гармонические сигналы всех частот и единичных амплитуд. В линейных системах форма и частота установившейся реакции совпадают с входом. Комплексная частотная характеристика *W*() дает возможность определить амплитуду и фазу гармонического сигнала на выходе системы по значению частоты:



(6)



где и ϕ(ω) = = arg*W*(*j*ω) – амплитудная и фазовая частотные характеристики; , и – вещественная и мнимая частотные характеристики.



На рис.5. изображен пример годографа *W*, называемого *амплитудно-фазовой характеристикой* (АФХ). Реальные объекты с повышением частоты хуже пропускают сигналы – ослабляют амплитуду и вносят отрицательный фазовый сдвиг.



Амплитудно-частотные характеристики удобно представлять в логарифмическом масштабе: Если частота изменяется в логарифмическом масштабе, то логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) во многих практически важных случаях мало отличаются от прямолинейных асимптот с наклонами, кратными 20 дБ/дек. На рис.6 приведен примерный вид асимптотической ЛАЧХ; штриховая кривая – точная ЛАЧХ. Там же указаны наклоны асимптот в децибелах на декаду.



Хотя за основу задания динамических свойств систем может быть принята любая из форм представления операторов, для конкретных исследований та или иная форма оказывается более рациональной и возникает необходимость перехода от одной формы к другой. Многие задачи анализа связаны с преобразованием формы представления оператора. В ряде случаев эта процедура составляет наиболее трудоемкий этап анализа – построение частной модели, т.е. приведение к форме, позволяющей непосредственно вычислить показатели качества и вывести суждение о соответствии поведения системы заданным требованиям (например, построение временных или частотных характеристик системы управления).

Рис.6. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика



Наиболее прост формальный переход путем замены оператора дифференцирования на комплексный аргумент *s* от дифференциального уравнения (2) к передаточной функции (3) и обратно. Осуществляя переход к передаточным функциям, следует избегать сокращения общих делителей полиномов числителей и знаменателей, т.е. диполей рациональных функций. Такое сокращение при водит к потере части собственных составляющих движения при ненулевых предначальных условиях (составляющих свободных движений).



По временным и/или частотным характеристикам, полученным экспериментально, оценивают параметры передаточных функций или ординаты характеристик иного типа. Такие переходы оказываются неоднозначными, а их результаты зависят от выбора структуры оператора и алгоритма обработки данных.

2.2 Построение временных характеристик

Временные характеристики – импульсная переходная функция *w*(*t*) и переходная характеристика *h*(*t*) могут быть получены экспериментально, если удается подать на вход объекта воздействие в виде достаточно узкого импульса с необходимой амплитудой или ступенчатой функцией времени. Последнее более реально – функцию веса *w*(*t*) впоследствии можно получать дифференцированием функции *h*(*t*).

Статистические методы непараметрической идентификации позволяют оценить ординаты функции веса *w*(*t*) путем обработки данных вход-выход объекта в виде случайных сигналов, возможных в режиме нормальной эксплуатации (корреляционный анализ).

Существуют методы построения временных характеристик по частотным, базирующиеся на обратном преобразовании Фурье. В случае, когда исходная информация об объекте представлена в форме дифференциального уравнения (1), временные характеристики получают его решением.

В классической теории автоматического управления для решения дифференциальных уравнений часто привлекают так называемый операторный метод, связанный с преобразованием Лапласа. Метод особенно удобен в случае типовых воздействий в виде обобщенных функций и позволяет легко учесть ненулевые начальные условия.

Пусть дано дифференциальное уравнение *n*-порядка звена или системы автоматического управления (2). Необходимо получить выражения для импульсной переходной функции (функции веса) *w*(*t*), переходной характеристики *h*(*t*), а также для реакции в случае воздействия общего вида. Пусть изображение по Лапласу воздействия на входе системы или звена представляет собой дробно-рациональную функцию от *s:*

.



Если преобразовать по Лапласу дифференциальное уравнение *n*-го порядка при ненулевых предначальных условиях, то после разрешения полученного алгебраического уравнения относительно изображения переменной выхода имеем

. (7)



Здесь полином *AH*(*s*) определяется предначальными условиями. Если все предначальные условия нулевые, то изображение выхода



где *W*(*s*) *–* передаточная функция.

Искомое решение – переменная на выходе системы (оригинал) получается обратным преобразованием Лапласа:

(8)



где *с* – абсцисса сходимости.

Формула обращения Римана – Меллина устанавливает однозначное соответствие между оригиналом и изображением в точках непрерывности оригинала. Имеются алгоритмы и программы, позволяющие вычислять интеграл (8) при произвольных функциях *Y*(*s*). Практическое вычисление оригинала *у*(*t*) удобно производить, основываясь на теореме о вычетах, согласно которой значение интеграла (8) может быть представлено суммой вычетов подынтегральной функции,

,



где *ResY*(*s*) – вычет функции *Y*(*s*) в полюсе *si*; *i =* 1,...,*nY*; *nY* – число полюсов изображения *Y*(*s*); при *t* <0 функция *у*(*t*) = 0.

Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и типовых воздействий изображение *Y*(*s*) является дробно-рациональной функцией, которую можно представить в виде суммы простейших дробей:

, (9)



где – производная полинома *AY* по *s; si –* простые полюсы;



Оригинал *y*(*t*) в соответствии с разложением (9) имеет вид:

.



Импульсная переходная функция (функция веса) *w*(*t*) представляет собой реакцию системы на -функцию при нулевых начальных условиях. Поскольку изображение -функции , то функция веса представляет собой обращение по Лапласу передаточной функции и.



Разложение передаточной функции на сумму простейших дробей в случае простых полюсов *si; i =* 1, …, *n* имеет вид:

, (10)



где *Ci –* коэффициент разложения (вычета),

. (11)



***Пример.*** Рассмотрим определение функции веса с помощью формул (10) и (11) для передаточной функции

. (12)



Полюсы передаточной функции *s*1 *=* -1*; s*2 *=* -2*.* Разложение (12) на сумму простейших дробей имеет вид:

.



Обратное преобразование Лапласа дает

.



Переходная характеристика *h*(*t*) представляет собой реакцию системы на единичную ступенчатую функцию *I*(*t*) при нулевых начальных условиях. Поскольку , то .



Полюсами изображения являются полюс воздействия *s*1 *=* 0 и полюсы передаточной функции. Легко убедится, что

, .



***Пример.*** Рассмотрим получение переходной характеристики системы с передаточной функцией (12). Разложение изображения *H*(*s*) на сумму простейших дробей:

,



где

;



;



.



Следовательно, переходная характеристика описывается функцией

.



В общем случае произвольного воздействия разложение изображения переменной выхода (7) запишется так:

, (13)



где *si*, *i =* 1, …, *n* – полюсы передаточной функции *W*(*s*); *sk*, *k =* 1, …, *nF* – полюсы изображения воздействия *F*(*s*); принято, что , т. е. полюсы воздействия не равны полюсам передаточной функции (нет обобщенного резонанса).



В выражении (13) первая группа слагаемых определяет переходную составляющую вынужденного движения *y*пер(*t*); вторая группа – установившаяся составляющая вынужденного движения *y*уст(*t*), третья – свободные движения *y*св(*t*):

.



Установившееся вынужденное движение *y*уст(*t*) обусловлено полюсами изображения воздействия *sk*; переходная составляющая вынужденного движения *y*пер(*t*) образуется из-за ненулевых посленачальных условий (изменение начальных условий приложением в момент времени *t* = 0 конкретного воздействия) и определяется полюсами передаточной функции; свободные движения *y*св(*t*) имеют место при ненулевых предначальных условиях и также определяются полюсами передаточной функции.

Если анализируется автономная система автоматического управления *Ms*, представленная в форме однородного дифференциального уравнения

; *y*(0),



то его решение имеет вид:

. (14)



Если изображение *Y*(*s*) имеет кратные полюсы, то вместо формул (13), (14) записываются более сложные выражения.

2.3 Построение частотных характеристик

Частотные характеристики (6) – амплитудную *R*() и фазовую можно получать экспериментальным путем, если удается подавать на вход устойчивого объекта гармонические воздействия различных частот из диапазона существенного для выявления требуемых свойств объекта. Статистические методы непараметрической идентификации (спектральный анализ) позволяют оценить значения частотных характеристик путем обработки временных последовательностей на входе и выходе объекта.



Частотные характеристики можно получить по временным характеристикам с помощью преобразования Фурье.

В том случае, когда исходная информация об объекте представлена в форме дифференциального уравнения (1), частотные характеристики строят расчетным путем.

Рассмотрим переходы от дифференциального уравнения *n*-порядка (1) и передаточной функции (3) к частотным характеристикам.

Установившиеся реакции линейной системы на гармоническое воздействие единичной амплитудысоответствуют частному решению неоднородного дифференциального уравнения (2). Будем искать частное решение:



,



где *R*(ω), ϕ(ω) *–* амплитуда и фаза, в общем случае зависящие от частоты.

Учтем, что

, ;



, .



Подставим эти соотношения в неоднородное дифференциальное уравнение (2), записанное в операторной форме,

.



После деления обеих частей на ехр{*j*ω*t*} можно записать:

.



Таким образом, амплитудно-частотная характеристика находится как модуль

,



а фазовая частотная характеристика – как аргумент

ϕ(ω) = arg*W*(*j*ω)

комплексной частотной характеристики *W*(*j*ω)*.*

Одновременно получаем переход от передаточной функции к частотным характеристикам. Комплексная частотная характеристика получается заменой аргумента передаточной функции *s* на *j*ω:

.



В общем случае *s* может принимать значения на любом контуре комплексной плоскости.

Вычисление значений частотных характеристик для конкретного *s = j*ω (а в общем случае *s* *=* α *+ j*ω) сводится к вычислению значений полиномов *В*(*s*) и *А*(*s*) с последующим делением полученных комплексных чисел. При этом получаются значения вещественной *P*(ω) и мнимой *Q*(ω) частотных характеристик. Значение амплитудной частотной характеристики вычисляется как

.



Трудности возникают при расчете значений фазочастотной характеристики по формуле

; *k =* 0*,* … (15)



Значения ϕ(ω) получаются на интервале (- π, π), поэтому в случае систем высокого порядка для определения истинных значений фазовых сдвигов принимается предположение о том, что в пределах выбранного шага частот ϕ(ω) не изменяется на ± π, т.е. корни полиномов *B*(*s*) и *A*(*s*) располагаются достаточно далеко от мнимой оси.

Соотношение (15) не определяет аргумент ϕ(ω) комплексного числа *W*(*j*ω), так как ему вместе сϕ удовлетворяет и ϕ *+* π. Однако из-за непрерывности фазовой характеристики ϕ(ω), принимающей отличные от нуля значения, она однозначно характеризуется текущим tgϕ(ω) *= Q*(ω)*/P*(ω), ωmin *<* ω *<* ωmax и начальным ϕ(ω0);ωmin *<* ω *<* ωmaxзначениями. На этом свойстве непрерывности фазовой характеристики можно получить алгоритм построения частотных характеристик, если истинное значение ϕ(ω0) лежит в пределах (- π, π).

2.4 Построение моделей по системе дифференциальных уравнений

Системы дифференциальных уравнений обычно получаются в результате построения аналитическим методом математических моделей физических систем с сосредоточенными компонентами.

Пусть исходные знания об объекте управления имеют вид некоторой физической системы с сосредоточенными компонентами; это может быть, например, многоконтурная электрическая или механическая схема. На основе соответствующих законов по определенным правилам записываются компонентные уравнения и уравнения связей. Далее эти уравнения можно привести к следующему виду:

*i =* 1, …, *N;*(16)



*q =* 1, …, *K.*



Уравнения (16) можно записать в матричном виде:

*A*(*p*)*x*(*t*) = *B*(*p*)*f*(*t*);

*y*(*t*) = *C*(*p*)*x*(*t*),

где *х* – вектор внутренних переменных размерности *N*; *f* и *y* – векторы переменных входа и выхода размерностей *Р* и *K* соответственно; *А*(*р*), *В*(*р*), *С*(*p*) – полиномиальные матрицы; обычно матрица *С* – числовая, т. е. состоит из нулей и единиц, указывающих, какие из переменных *х* принимаются за выходные.

Уравнения (16), (17) называют *непричинно-следственными*, между внутренними переменными *xi*(*t*) нет объективных причинно-следственных отношений.

При определенных условиях систему (16) можно записать в форме системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных,

*i =* 1, …, *n*,



дополненной уравнениями выходов

*yq*(*t*) = *q* = 1, …, *K*.



Модели в терминах вход-состояние-выход используют понятие *состояния.* Состояние динамического объекта (с памятью) – необходимая и достаточная информация для определения будущего поведения по дифференциальным уравнениям при заданных входных воздействиях независимо от того, каким путем система пришла в это состояние. Для конечномерных систем состояние представляется как *n*-мерный вектор ν(*t*); при *t* = 0 вектор ν(0) – начальное состояние. Система дифференциальных уравнений первого порядка в так называемой нормальной форме пространства состояний (стандартизованной векторно-матричной форме) записывается следующим образом:

*A*ν + *Bf*, ν(0);



(18)

*y* = *C*ν + *Df*,

где *f* **–** *Р*-мерный вектор входа;*у* – *K*-мерный вектор выхода; *A* **–** матрица состояний; *B* **–** матрица входа; *C* – матрица выхода; *D* – матрица обхода соответствующих размеров. Первую векторно-матричную строку в системе уравнений (18) называют уравнениями состояний, а вторую – уравнениями выхода.

***Пример****.* При *n* = 2 дифференциальные уравнения (18) системы с одним входом и одним выходом в раскрытой форме запишутся так:



Матрицы будут иметь следующий вид:

*A* **=** ; *B* **=** ;



*C* **=** (*c*1 *c*2); *D* **=** *d*.

Если первое уравнение в системе (18) записать с использованием оператора дифференцирования *р*, то имеем: (*pI – A*)ν *= Bf*, где *I* – единичная матрица. Таким образом, уравнения в форме пространства состояний являются частным случаем системы дифференциальных уравнений (17) с матрицей

*A*(*p*) = *pI* – *A*. (19)

*Автономная система* описывается однородным дифференциальным уравнением

; ,



причем начальные условия являются математическим отражением предыстории. Если они ненулевые, то система совершает так называемые свободные движения. В конечномерных системах свободные движения определяются полностью оператором *А*(*р*) и конечным числом начальных условий независимо от того, каким путем система пришла в это состояние к моменту начала наблюдения.

Автономная система может описываться системой дифференциальных уравнений различных порядков:

*A*(*p*)*x*(*t*) = 0, *x*(0);

*y*(*t*) = *Cx*(*t*),

а также дифференциальными уравнениями в форме пространства состояний

= Aν, ν(0);



*y* = *C*ν.

Рассмотрим построение моделей вход-выход по системе дифференциальных уравнений. Пусть дана система дифференциальных уравнений (17). Построение модели в терминах «вход-выход» означает исключение внутренних переменных, что проще выполнить, если от дифференциальных уравнений перейти к системе алгебраических уравнений для изображений, приняв нулевые начальные условия:

*A*(*s*)*X*(*s*) = *B*(*s*)*F*(*s*); (20)

*Y*(*s*) = *CX*(*s*).

При небольшом числе уравнений применяют метод последовательных исключений. Пусть, например, объект с одним входом *f* и одним выходом *у* имеет две внутренние переменные *x*1 и *х*2:

(21)



Решая систему (21) относительно *Y*(*s*), получим:



Теперь по выражению



легко получить полиномы числителя и знаменателя передаточной функции и записать выражение для одного дифференциального уравнения. Используем операции перемножения и вычитания полиномов.

В случае, когда требуется вычислить передаточную функцию, связывающую одну из выходных переменных *у* = *xq* с одним из воздействий *fr*,применяют *правило Крамера*:

, (22)



где полиномиальная матрица *Aqr* получена из матрицы *А* заменой *q*-го столбца *r*-м столбцом матрицы *В*. Знаменатель передаточной функции *Wqr*(*s*) независимо от номеров входа *r* и выхода *q* равен характеристическому полиному системы

*A*(*s*) = det *A*(*s*) (23)

Этот способ построения моделей вход-выход по системе уравнений (20) сводится к вычислению определителей полиномиальных матриц.

Для примера (21) запишем систему в матричной форме (20); матрицы имеют вид:

*A*(*s*) = ; *B*(*s*) = . (24)



В соответствии с правилом Крамера по формуле (23) определяем характеристический полином:



числитель передаточной функции *W*21(*s*) (здесь *r* =1, *q =* 2) равен

det*A*21 =



Имеем систему алгебраических уравнений многомерной системы, записанную для изображений переменных (20). В общем случае передаточная матрица системы, т.е. модель вход-выход через полиномиальные матрицы выражается следующим образом:

*W*(*s*) *= CA*-1(*s*)*B*(*s*)*.* (25)

Здесь вычисления связаны с обращением и перемножением полиномиальных матриц. Ясно, что полиномиальная матрица системы *А*(*s*) должна быть не особенной, иными словами, ее определитель не равен тождественно нулю. Известно, что

,



где *А\**(*s*) *–* присоединенная матрица.

Следовательно, выражение для передаточной матрицы (25) примет вид:

*W*(*s*) = *CA*\*(*s*)*B*(*s*)/*A*(*s*). (26)

***Пример****.* Модель вход-выход в виде линейного дифференциального уравнения

*y*(*n*) + *a*1*y*(*n*-1) + … + *an*-1*y*(1) + *any* = *b*0*u*(*n*) + *b*1*u*(*n*-1) + … + *bnu*

может быть приведена к модели в переменных состояния следующим образом:

*x*(1) = *xi* + 1 + *ki*\**u*, где *i* = 1, *n*-1;

*x*(1)*n* = – *anx*1 – *an*-1*x*2 –…– *a*1*xn* + *knu*;

*y* = *x*1 + *k*0*u*;

коэффициенты *k* рассчитываются по рекуррентным формулам:

*k*0 *=* *b*0;

*k*1 *=* *b*1 *– a*1*k*0;

…

;



,



где *n* = 3; *a*1 = 0; *a*2 = 2; *a*3 = 4; *b*0 = 2; *b*1 = *b*2 = 0; *b*3 = –1.

Определим значение *ki:*

*k*0 = *b*0 = 2;

*k*1 = *b*1 – *a*1\**k*0 = 0;

*k*2 = *b*2 – *a*1*k*1 – *a*2*k*0 = – 4;

*k*3 = *b*3 – *a*1*k*2 – *a*2\**k*1 – *a*3*k*0 = – 9.

Тогда исходное уравнение в переменных состояниях (нормальная форма):

*x*1(1) = *x*2;

*x*2(1) = *x*3 – 4*u*;

*x*3(1) = – 4*x*1 – 2*x*2 – 9*u*;

*y* = *x*1 + 2*u*,

или в векторной форме

;



,



где матрицы объекта, управления, наблюдения и обхода, соответственно,

; ; ; .



2.5 Построение моделей вход-выход по уравнениям в форме пространства состояний

Пусть дифференциальные уравнения объекта или системы управления записаны в форме пространства состояний:

*A*ν + *Bf*, ν(0);



(27)

*y* = *C*ν + *df*.

Для простоты примем одномерный случай: переменные входа и выхода *f* и *y* являются скалярами; матрица входа *В* – столбец; матрица выхода *С* – строка; *d* – скаляр обхода.

Преобразуем уравнения (27) по Лапласу при нулевых начальных условиях:

*s*ν(*s*) = *AV*(*s*) + *BF*(*s*);

(28)

*Y*(*s*) = *C*ν(*s*) + *dF*(*s*).

Выразим решение системы алгебраических уравнений – изображение вектора состояний – в следующей форме:

ν(*s*) = (*sI* – *A*)-1*BF*(*s*), (29)

где (*sI – A*)-1 – матрица, обратная характеристической матрице (*sI – A*) матрицы *А*; *I* **–** единичная матрица. Подставим (28) в (29) и получим

*Y*(*s*) = *W*(*s*)*F*(*s*) = [*C*(*sI* – *A*)-1*B* + *d*]*F*(*s*).

Передаточная функция *W* может быть записана и иначе, если учесть, что

(*sI* – *A*)-1 = (*sI* – *A*)\* / *A*(*s*), (30)

где (*sI – A*)*\** – присоединенная матрица;

*A*(*s*) = det(*sI* – *A*), (31)

*A*(*s*) – определитель характеристической матрицы – характеристический полином системы дифференциальных уравнений (17).

С учетом (30) передаточная функция запишется как

(32)



Элементами присоединенной матрицы *(sI – A)\** являются алгебраические дополнения элементов характеристической матрицы (*sI – A*), т.е. полиномы. Их степени не могут превосходить *n* – 1. Таким образом, как видно из формулы (32), степень *m =* deg*B* полинома числителя передаточной функции *W* не может быть выше степени *n =* deg*A* характеристического полинома и равна ей только при . Это ограничивает возможности описания динамических систем в нормальной форме пространства состояний .



Имея полиномы передаточной функции (32), легко записать дифференциальное уравнение *n*-го порядка.

Преобразуем по Лапласу уравнения (27)

*s*ν(s) – ν(0) = *A*ν(*s*) + *BF*(*s*)

и получим выражение для изображения вектора состояния

ν(*s*) = (*sI* – *A*)-1ν(0) + (*sI* – *A*)-1 *BF*(*s*). (33)

В этой сумме первое слагаемое – свободное, а второе – вынужденное движения системы. Для получения оригинала – функции времени ν(*t*) выполняется операция обратного преобразования Лапласа. В данном случае выражение для изображения представляет собой матрицу, однако справедлива аналогия со скалярным случаем. Оригинал скалярной функции



имеет вид экспоненты. Оказывается, что аналогичное выражение имеет место и в матричном случае, т.е.

*L*-1 {(*sI* – *A*)-1} = *eAt* = Ф(*t*),

что является матричной экспонентой, называемой матрицей перехода. Произведению изображений отвечает свертка оригиналов, это справедливо и для матриц. Поэтому вектор состояния как функция времени получается из выражения (33) и имеет следующий вид:

(34)



Изображение переменной выхода при нулевых начальных условиях ν(0) *=* 0 получится подстановкой второго слагаемого выражения (33) во второе уравнение системы (27):



Если на вход системы подается единичный импульс, т.е. *F*(*s*) *=* 1, то реакция системы (импульсная переходная функция) определяется из выражения (34):

(35)



Сопоставляя полученную формулу с выражением для передаточной функции (32), замечаем, что

.



Отсюда следует один из способов получения матрицы перехода путем обращения по Лапласу матрицы (*sI – A*)*-1.*

2.6 Модели систем управления с раскрытой причинно-следственной структурой

Под *структурой систем управления* понимают причинно-следственную связь между элементами направленного действия. Понятия «система» и «структура» являются близкими по смыслу. Наиболее общие определения понятий системы и структуры строятся как отношения на множествах, математически это *графы*. Графы являются универсальным средством описания структур систем. При небольшом числе элементов и связей весьма наглядны *диаграммы* графов, т.е. их геометрические образы.

В зависимости от элементов множеств рассматриваются различные типы графов. Приведенная на рис.3, *а* схема, иллюстрирующая принципы управления, отражает типовые структуры причинно-следственных отношений основных элементов систем управления и, по существу, представляет собой *ориентированный граф*. Электрическая и механическая схемы, изображенные на рис.2, также являются примерами графов, только неориентированных.

Имея в виду структуру связей элементов, иногда говорят о топологии (топографии) системы. Даже без конкретизации вершин и дуг, т.е. только по топологии, можно сделать ряд важнейших выводов о свойствах системы, которые сохраняются при дальнейшем раскрытии неопределенности – уточнении структур операторов и конкретизации значений параметров.

В зависимости от подхода к моделированию и от конкретного содержания элементов исходного множества и элементов отношения модели с раскрытой структурой могут быть представлены структурными схемами, сигнальными графами, системами дифференциальных уравнений в причинно-следственной форме и некоторыми другими формами.

*Структурная схема* (C-граф) представляет собой причинно-следственную связь звеньев. Линейное звено (рис.7, *а*) в общем случае имеет любое число входов; оно преобразует сумму входов в единственную переменную выхода по некоторому оператору *Wi* (рис.7, *б*):



В частном случае оператора тождественного преобразования звено выступает как сумматор.

Структурная схема является ориентированным графом и состоит из множества вершин *W =* {*W*1, *…*, *WN*} и множества дуг *Х* = {(*Wi*, *Wj*)} – упорядоченных пар вершин. Дугам графа соответствуют переменные *xi*; *i =* 1,..., *N*, а вершинам – звенья. Для того, чтобы отличать рассматриваемый граф от сигнальных графов других типов, назовем его С-графом. На языке теории бинарных отношений С-граф определяется как пара множеств:

С = < *W*,*X* >,



Рис.8. Структурная схема (С-граф)

а структурная схема (геометрический образ) называется также диаграммой графа (рис.8). Вершина С-графа – звено общего вида, по определению суммирует переменные заходящих дуг. Это позволяет отказаться от специального элемента суммирования, что отличает С-графы от классических структурных схем.

Дуга С-графа – элемент (*Wi,* *Wj*) отношения *Х* задает причинно-следственную связь между двумя звеньями, причем выход *j*-го звена является входом *i*-го. Дуге (*Wi*, *Wj*) соответствует переменная *xj.*

Теоретико-множественное описание систем дает естественный способ ввода и редактирования моделей систем управления как последовательного раскрытия неопределенности. Для этого модели упорядочиваются по рангам неопределенности *R* = 0, 1, 2, 3.

Множество *W* звеньев задает модель нулевого ранга *Ms*(0)*.* Для примера С-графа, диаграмма которого изображена на рис.8, множество перечисляется так:

*W* = {*W*1, *W*2, *W*3, *W*4}.

В случае однотипных звеньев можно ограничиться заданием числа вершин графа (звеньев), т.е. мощности множества .



Дополнение модели *Ms*(0) множеством *Х* дает модель первого ранга *Мs*(1) – это топология (топография) системы. Для С-графа, изображенного на рис.8, множество перечисляется так: *Х* = {(1,3), (1,4), (2,1), (3,2), (4,1)}. В перечислении приведены только индексы (номера) звеньев.

Дальнейшее раскрытие неопределенности достигается при задании структур операторов вершин. Для рассматриваемого класса систем передаточные функции являются отношениями полиномов: *Wi*(*s*) *= Bi*(*s*) / *Ai*(*s*)*.* Задание их структур сводится к указанию степеней *mi и ni* полиномов *Bi и Ai.* Когда для всех звеньев заданы структуры операторов, образуется модель системы структурного ранга *Мs* (2).

Пусть для рассматриваемого примера системы передаточные функции звеньев имеют вид *W*1(*s*) *= k*1*; W*2(*s*) *= k*2/(1 *+ T*2*s*)2*; W*3(*s*) *=* -1*; W*4(*s*) *=* -τ4*s* /(1 *+ T*4*s*)*.* Информацию о структурах операторов можно закодировать массивами степеней полиномов числителей и знаменателей передаточных функций: {0,0,0,1} и {0,2,0,1}.

Результатом конкретизации значений всех коэффициентов полиномов является полностью определенная модель третьего, параметрического ранга *Мs* (3).

Ранее изложено описание собственно системы (автономной системы). Для описания связей системы со средой следует указать звено, на вход которого подается воздействие, и звено, выход которого является выходом системы. На примере С-графа (рис.8) номер входного звена *r* =1, а выходного *q* =2. В результате оказывается определенной модель системы со связями со средой *Mysf* (3). При изучении влияния вариаций звеньев на характеристики системы указывается варьируемое звено. На рис.8 им является звено *W*2.

*Сигнальный граф* (граф Мэзона) является одной из удобных в теории и расчетной практике форм представления моделей систем управления.

Модель системы в форме сигнального графа определяется как бинарное отношение *W* на множестве переменных *Х =* {*x*1, …, *xN*}: *G* = < *X*,*W* >

Элементам отношения *W* *=* {(*xi xj*)} ставятся в соответствие операторы преобразования переменных. На диаграммах сигнальных графов переменным отвечают вершины, где суммируются сигналы заходящих дуг, а элементам отношения – дуги. Способы задания моделей различных рангов в форме сигнальных графов те же, что и для С-графов.



Рис.9. Диаграмма сигнального графа

На рис.9 изображена диаграмма сигнального графа – модель топологического ранга, несущая ту же информацию о системе, что и структурная схема (рис.8). Необходимо подчеркнуть, что формы представления моделей и способы их отображения могут быть различными – символьными или алгебраическими (уравнения, матрицы), геометрическими или топологическими (диаграммы графов). Информация о моделях различных рангов *R* последовательно раскрывается описанием множеств, задающих: состав элементов *R* =0; топологию причинно-следственных связей между ними *R =* 1; структуры операторов *R =* 2; параметры *R =* 3.

Теоретико-множественное представление структур систем в форме графов обеспечивает формализацию описания моделей, упрощает кодирование их графических образов, а также разработку алгоритмов анализа систем.

2.7 Типовые звенья автоматических систем управления

При исследовании САУ ее разбивают на простые звенья. В результате этого математическое описание каждого звена может быть составлено без учета связей его с другими звеньями, а описание всей САУ получено как совокупность уравнений отдельных звеньев.

Уравнение *усилительного звена* имеет вид:

*y = Kx*. (36)

Передаточная функция в этом случае:

*W*(*p*) *= K*. (37)

Амплитудно-фазовая характеристика:

*W*(*j*ω) *= K*. (38)

Примером усилительного звена является рычаг. Уравнение рычага имеет вид



Уравнение *апериодического звена* имеет вид:

. (39)



Передаточная функция:

(40)



Амплитудно-фазовая характеристика:

(41)



АФЧХ представляет собой полуокружность с радиусом *K/*2 и центром в точке (*K/*2,*j*\*0) на действительной оси (рис.10).

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

(42)



При малых значениях ω << 1/*Т*

(43)



На больших частотах, когда ω >> 1/*T*

. (44)



В соответствии с выражениями (43) и (44) на рис.10, *б* приведена ЛАЧХ апериодического звена. Примером апериодического звена является рассмотренная ранее емкость.

Уравнение *колебательного звена*:

(45)



Рис.13. Электрический

резонансный контур



Рис.14. Технологическая схема

из двух емкостей

причем *Т*1 и *Т*2 связаны условием

(46)



Это условие означает, что корни характеристического уравнения вида

(47)



соответствуют дифференциальному уравнению (45), являются комплексными. Передаточная функция, соответствующая уравнению (45), имеет вид

(48)



Переходная функция, являющаяся решением уравнения (45) при *х = l*(*t*), приведена на рис.11.

Амплитудно-фазовая характеристика звена (рис.12):

. (49)



Примером колебательного звена являются электрический резонансный контур (рис.13)и двухъемкостная схема (рис.14).

Если в уравнении (45) выполняется условие

, (50)



то характеристическое уравнение (47) имеет отрицательные действительные корни. В этом случае звено называется апериодическим звеном второго порядка. Все рассмотренные выше звенья называются статическими.

Уравнение *интегрирующего звена*:

(51)



или в интегральной форме:

(52)



Рис.12. АФЧХ колебательного звена



Рис.11. Переходные характеристики колебательного звена

Переходная функция интегрирующего звена имеет вид (рис.15, *а*):

; (53)



передаточная функция:

(54)



Рис.16. Емкость с притоком жидкости сверху

Рис.15. Характеристики интегрирующего звена: *а* – переходная; *б* – АФЧХ



*б*

*а*

амплитудно-фазовая характеристика (рис.15, *б*):

(55)



Иногда применяется другая форма записи уравнения интегрирующего звена:

(56)



Примером интегрирующего звена является емкость с притоком жидкости сверху, причем расход на стоке не зависит от уровня в емкости (рис.16). Такая емкость не обладает самовыравниванием на притоке. Интегрирующее звено называется астатическим.

Уравнение *дифференцирующего звена*:

(57)



переходная функция:

; (58)



передаточная функция:

; (59)



амплитудно-фазовая характеристика:

, (60)



Рис.17. Транспортер

т.е. она совпадает с положительной мнимой полуосью.

Характеристики дифференцирующего звена обратны характеристикам интегрирующего звена. Идеальных дифференцирующих звеньев в природе не существует, но они используются при анализе сложных систем, из которых можно выделить дифференцирующие звенья.

*Звено с запаздыванием* без искажения воспроизводит на выходе входную величину, задерживая ее на время запаздывания τ.

Уравнение такого звена имеет вид:

; (61)



передаточная функция:

; (62)



амплитудно-фазовая характеристика:

. (63)



Примерами таких звеньев являются транспортеры (рис.17), длинные трубопроводы и т.д. Если известны расстояние *l* и скорость движения ленты транспортера *v*, то запаздывание можно определить по формуле

. (64)



2.8 Характеристики систем с типовой структурой

Системы с типовой структурой образуются последовательным (рис.18, *a*), параллельным (рис.18, *б*) соединениями звеньев или соединением с обратной связью (рис.18, *в*). Выявление свойств типовых систем в целом связано с построением эквивалентных систем со свернутой структурой (рис.18, *г*). Эквивалентные системы в терминах вход-выход могут быть представлены в форме дифференциального уравнения

*A*э(*р*)*у*(*t*) = *В*э(*р*)*f*(*t*), (65)

передаточная функция



временная характеристика:



Рис.18. Системы с типовой структурой

*а*

*б*

*в*

*г*

;



частотная характеристика



Дифференциальные уравнения системы, образованной последовательным соединением звеньев, запишутся так:

*A*1(*p*)*x*1(*t*) = *B*1(*p*)*f*(*t*);

*A*2(*p*)*x*2(*t*) = *B*2(*p*)*x*1(*t*);

*y*(*t*) = *x*2(*t*).

В результате исключения переменных *х*1 *и* *х*2 получим операторные полиномы уравнения (65):

*А*э(*р*) *= А*1(*р*)*А*2(*р*); *Вэ*(*р*) *= В*1(*р*)*В*2(*р*).

Одновременно получаем передаточную функцию эквивалентного звена:

*W*э(*s*) =*W*1(*s*)*W*2(*s*). (66)



Временную характеристику – импульсную переходную функцию получаем обратным преобразованием Лапласа передаточной функции (66):

*w*э(*t*) =.



Амплитудная частотная характеристика равна произведению соответствующих характеристик последовательно соединенных звеньев:

*R*э(ω) = *R*1(ω)*R*2(ω),

фазочастотная характеристика равна сумме

ϕэ (ω) = ϕ1(ω) + ϕ2(ω),

ЛАЧХ системы получается в виде суммы

*L*э(ω) = *L*1(ω) + *L*2(ω).

На рис.19 изображен пример графического построения ЛАЧХ системы, образованной последовательным соединением интегрирующего звена *W*1 и апериодического звена первого порядка *W*2.

Дифференциальные уравнения системы, образованной параллельным соединением звеньев (см. рис.18, *б*), запишутся так:

*А*1(*p*)*x*1(*t*) = *В*1(*p*)*f*);

*А*2(*p*)*x*2(*t*) = *В*2(*p*)*f*(*t*);

*y*(*t*) = *x*1(*t*) + *x*2(*t*).



Рис.19. Пример построения асимптотической ЛАЧХ

последовательного соединения

В результате исключения переменных *xi* получим операторные полиномы эквивалентного уравнения (65):

*А*э(*p*) = *А*1(*p*)*А*2(*р*);

*В*э(*p*) = *В*1(*p*)*А*2(*p*) + *А*1(*р*)*В*2(*р*).

Передаточная функция эквивалентного звена получается как сумма передаточных функций звеньев:

*W*э(*s*) =*W*1(*s*) + *W*2(*s*). (67)



Временная характеристика системы является суммой временных характеристик звеньев:

*w*э(*t*) = *w*1(*t*)*w*2(*t*).

При параллельном соединении звеньев легко получить вещественную *Рэ*(ω) и мнимую *Qэ*(ω) частотные характеристики эквивалентного звена:

*Р*э(ω) = *Р*1(ω) + *Р*2(ω); *Q*э(ω) = *Q*1(ω) + *Q*2(ω).

Диполь передаточной функции *W*э(*s*) получается:

• если одна из передаточных функций звеньев имеет диполь;

• звенья имеют одинаковые полюсы *А*1(*si*) *= A*2(*si*) *=* 0*.*

Дифференциальные уравнения типового соединения с обратной связью:

*А*1(*p*)*x*1(*t*) = *В*1(*p*)*x*3(t);

*А*2(*p*)*x*2(*t*) = *В*2(*p*)*x*1(*t*);

*x*3(*t*) = *f*(*t*) *x*2(*t*);



*y*(*t*) = *x*1(*t*),

где знак «минус» соответствует отрицательной обратной связи, а знак «плюс» – положительной.

Исключение внутренних переменных дает операторные полиномы дифференциального уравнения эквивалентного звена:

*А*э(*p*) = *А*1(*p*)*А*2(*р*) *B*1(*p*)*B*2(*р*);



*Вэ*(*p*) *= В*1(*p*)*А*2(*p*)*.* (68)

Передаточная функция эквивалентного звена:

*W*э(*s*) = . (69)



Если звенья образуют контур положительной обратной связи, то в формулах (69), (69) используется знак «минус».

Временная характеристика системы с обратной связью *w*э(*t*) сложным образом зависит от *w*1(*t*) и *w*э(*t*), поэтому ее удобнее получать обратным преобразованием Лапласа эквивалентной передаточной функции:

*w*э(*t*) =.



Комплексная частотная характеристика системы с обратной связью также сложным образом зависит от частотных характеристик звеньев:

*W*э(*j*ω) = . (70)



Свойства системы с обратной связью определяются усилением разомкнутого контура с передаточной функцией *W*p(*s*) *=* *W*1(*s*) *+ W*2(*s*) на различных частотах. Если усиление контура мало, то можно пренебречь обратной связью. Действительно, по виду выражения (44) можно заключить, что на частотах, где выполняется условие

= << 1



имеет место приближенное соотношение

*W*э(*j*ω) ≈ *W*1(*j*ω).

Практически усиление контура считается малым, если

*L*р(ω) = < – (16-20) дБ.



С другой стороны, на частотах, где выполняется условие

>> 1,



имеет место другое приближенное соотношение

*W*э(*j*ω) ≈ .



Система в целом имеет частотную характеристику, близкую к обратной частотной характеристике звена обратной связи. Практически усиление велико, если *L*р(ω) *>* 16-20дБ. На остальных частотах, где -16дБ< *LP(*ω)<16дБ, необходимо пользоваться точной формулой (70) или специальными номограммами замыкания.

Рассмотрим пример системы, образованной интегрирующим звеном, охваченным единичной отрицательной обратной связью (рис.20, *а*). На рис.20, *б* изображены ЛАЧХ *L*1 и *L*2 этих звеньев. На частотах ω < 0,1 с-1 усиление контура превышает 20 дБ.

Следовательно, амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы на этих частотах определяется только свойствами звена обратной связи, т.е. замкнутая система на низких частотах с большой степенью приближения ведет себя как безынерционное звено с единичным усилением.

Напротив, на частотах ω > 10 с-1 усиление контура ниже –20 дБ. Здесь контур практически разомкнут – замкнутая система ведет себя как интегрирующее звено,

*W*э(*s*) =.



Рис.21. Иллюстрация неполноты передаточной функции контура



На комплексной частоте нуля передаточной

функции *Wp* усиление контура равно нулю, т.е. контур как бы разомкнут на соответствующей комплексной частоте. Если *W*p имеет такой полюс, то в разложении *W*p на сумму простейших дробей соответствующий коэффициент *Сi* равен нулю.

На рис.21 изображена структурная схема системы с единичной обратной связью, где звено в прямой цепи

*W*1(*s*) = *W*p(*s*)



представлено как параллельное соединение простейших звеньев.

2.9 Неопределенность моделей систем управления



Рис.22. Области адекватности модели

Математические модели не отражают исчерпывающим образом динамические свойства систем управления в силу идеализации и упрощений, неизбежных при моделировании, неточной реализации алгоритмов управления и изменений характеристик объектов и других элементов в процессе эксплуатации. Если изменения характеристик происходят достаточно медленно по сравнению с длительностью процессов управления, то вместо нестационарных моделей (например, дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами) можно рассматривать стационарные модели.

Модели систем управления строятся для строго оговоренных условий взаимодействия со средой, и их адекватность оригиналам определяется и характеристиками воздействий. Значения параметров, структура и класс операторов зависят от амплитуд изменения и частотного спектра сигналов.

Линейные модели обычно строят для малых отклонений переменных от выбранных установившихся режимов. Если амплитуды сигналов превышают некоторое определенное значение *А*, то приходится строить нелинейные модели, как правило, учитывающие всевозможные ограничения в реальных элементах. Иногда область адекватности линейных моделей ограничивается малыми амплитудами *а*, для которых следует учитывать такие нелинейные явления, как зону нечувствительности, сухое трение и др.

Выбранные структуры операторов (порядки дифференциальных уравнений) обеспечивают адекватность моделей по отношению к сигналам, частоты которых не превышают заданного предела. Границу области адекватности Ω обычно удается несколько расширить путем усложнения структуры операторов. На рис.22 показана область адекватности моделей на плоскости амплитуд *а* и частот ωсигналов.

Таким образом, модели систем управления оказываются не полностью определенными. При интерпретации результатов анализа и синтеза необходимо всегда иметь в виду неполную определенность моделей и учитывать ограниченность области их адекватности. Анализ наряду с выявлением основных свойств поведения систем управления должен включать и исследование чувствительности характеристик к вариациям параметров, структур операторов и топологии систем.

3. Нелинейные элементы систем управления

3.1 Безынерционные нелинейные элементы

В теории и практике управления элементы и системы рассматривают как преобразователи сигналов – носителей информации о цели, состоянии объекта и воздействиях среды (рис.23). Как известно, линейный безынерционный элемент полностью задается значением его коэффициента усиления.

Рис.24. Пример статической

характеристики нелинейного

элемента



Нелинейные зависимости между постоянными значениями входных и выходных сигналов *у = Р'*(*х*) могут задаваться аналитически, графически или таблично. В том случае, когда нелинейный элемент (НЭ) имеет один вход и один выход, особенно наглядны графики статических характеристик (СХ) (рис.24).

Условия преобразования сигналов безынерционными НЭ зависят от уровней сигналов и не зависят от их частоты. Приведем некоторые примеры безынерционных НЭ и их СХ.

Рассмотрим нелинейные элементы с кусочно-постоянными СХ. Простейшим представителем нелинейностей этой группы является так называемое идеальное реле (рис.25, *а*):



Более тонкое изучение может показать, что релейное устройство имеет гистерезис (рис.25, *б*). Выражение для двузначной СХ с разрывами первого рода можно записать так:



*а*

*б*

*в*

Рис.25. Кусочно-постоянные (релейные) статические характеристики

*а*

*б*

*в*



где *b* *–* половина зоны неоднозначности СХ; *y*0 *–* состояние реле, равное значению *у* до входа в зону неоднозначности. Таким образом, этот безынерционный НЭ обладает памятью: значение его выхода определяется не только значением входа в тот же момент, но также и предысторией (состоянием) НЭ по уровню сигнала.

Другим типом НЭ с кусочно-постоянной однозначной СХ является квантование сигналов по уровню в преобразователях аналог-код, предназначенных для ввода информации о состоянии непрерывных процессов в цифровые управляющие устройства (рис.25, *в*). Малая разрядность ЭВМ может оказаться существенным препятствием к достижению высокой точности и хорошего качества процессов в окрестности положений равновесия.

Теперь обратимся к нелинейным элементам с кусочно-линейными СХ. На рис.26, *а* показан график СХ НЭ типа «насыщение»:



Как правило, эта нелинейность вводится в модели для учета ограничений уровней переменных при исследовании поведения систем управления в режимах больших отклонений от положения равновесия.

Нелинейный элемент типа «зона нечувствительности» (рис.26, *б*) учитывает реальные свойства датчиков, исполнительных механизмов и других устройств при малых входных сигналах.



Нелинейность типа «люфт» (рис.26, *в*) является многозначной – одному значению входа соответствует бесчисленное множество (континуум) значений выхода. Этот НЭ моделирует кинематические сочленения механических приборов и устройств (например, редукторов).

Приведенные кусочно-линейные СХ непрерывны, но имеют разрыв производной *dy/dx.* Существуют и кусочно-линейные СХ с разрывами первого рода.

Рассмотрим нелинейные элементы с гладкими СХ. Гладкие СХ имеют непрерывные производные. Таковыми являются характеристики термопары (рис.27, *а*), устройства возведения входного сигнала в квадрат (рис.27, *б*), в куб (рис.27, *в*), индукционных электромеханических преобразователей угла, электромагнитных явлений с гистерезисом и др.



Нелинейные зависимости между значениями входа и выхода можно задавать параметрически – парой функций *x*(*t*), *y*(*t*); исключая параметр *t*, получим непосредственную связь между переменными входа и выхода. В случае однозначных СХ в качестве входа *x*(*t*) особенно удобен периодический сигнал треугольной формы с достаточной амплитудой, выход НЭ будет периодически повторять форму СХ. Для сложных НЭ с неоднозначными СХ выбор функции *x*(*t*) из условия исчерпывающего задания НЭ парой вход-выход является нетривиальной задачей. По существу, речь идет об экспериментальном исследовании НЭ, успех которого зависит от априорной информации.

3.2 Динамические нелинейные элементы

В общем случае дифференциальные уравнения, описывающие элементы систем или сами системы, являются нелинейными:

(71)



Иногда они разрешаются относительно старшей производной переменной выхода:

(72)



Примерами служат дифференциальные уравнения математического маятника и уравнение Ван дер Поля:



Часто дифференциальные уравнения представляются в форме Коши:

(73)



где ν – вектор переменных состояния; ϕ – вектор-функция; ψ – функция выхода. В уравнениях (71)-(73) предполагается, что нелинейные функции заданы аналитически.

Временная характеристика динамического линейного элемента – функция веса *w*(*t*) позволяет связывать переменные входа и выхода с помощью интеграла свертки. В линейных динамических элементах условия преобразования сигналов определялись лишь частотным спектром сигнала и не зависели от его уровня. Преобразование сигналов динамическими НЭ в значительной степени зависит как от уровней сигналов, так и от их частотных спектров.

3.3 Нелинейные модели с раскрытой структурой



Рис.28. Нелинейный интегратор

Рис.28. Нелинейный интегратор

Во многих случаях нелинейные модели появляются в результате дополнения линейных моделей нелинейными элементами, учитывающими такие естественные факторы, как ограниченность управляющих воздействий, наличие зоны нечувствительности в измерительных и исполнительных элементах, люфтов в кинематических сочленениях или искусственное введение нелинейностей в алгоритмы управления для получения свойств, недостижимых в линейных системах.

Простейший пример такой модели – нелинейный интегратор *dy/dt = F*(*x*) структурно изображается как последовательное соединение безынерционного НЭ и линейного интегрирующего звена (рис.28). На рис.29, *а* изображен другой пример – модель системы с обратной связью в форме структурной схемы, а на рис.29, *б* та же модель представлена в форме сигнального графа, одна из дуг которой помечена двумя штрихами, указывающими на нелинейный характер преобразования сигнала.



Рис.29. Нелинейная система с обратной связью

*а*

*б*

В этих примерах разделены динамическая линейная часть и безынерционная нелинейность: нелинейные эффекты сосредоточены в безынерционном, а динамические – в линейном элементах.

4. Примеры математических моделей объектов горной электромеханики

Модель асинхронного электропривода резания угледобывающего комбайна

Уравнение моментов:



где



*J*эд – момент инерции ротора и приведенных к нему вращающихся частей; ω – угловая частота тока в сети; *s* – скольжение двигателя; *p* – число пар полюсов электродвигателя; *Q*т – теоретическая производительность гидронасоса; *P*о – давление в гидросистеме; ωн – угловая скорость насоса (равная угловой скорости электродвигателя); *М*о – момент резания при толщине срезаемой стружки *h* =0; *а*′ – коэффициент, зависящий от крепости разрушаемого угля.

Скольжение двигателя для устойчивой части механической характеристики приближенно можно определить по формуле



где *s*к, *М*к – соответственно критическое скольжение и критический момент электродвигателя.

Окончательно получим



где

;



Модель системы регулирования нагрузки на электропривод угледобывающего комбайна в зависимости от скорости подачи

Уравнение относительно момента сил сопротивления резанию в направлении подачи имеет вид:



где τ – время пробега резцом расстояния между соседними резцами одной линии резания; *–* скорость подачи резца.



Модель управления скоростью вращения вала электродвигателя постоянного тока шахтной подъемной установки

Уравнение относительно скорости вращения Ω:



где *Т*эд *= L/R* – электромагнитная постоянная двигателя; *Т*м *= JR/cec*м – электромеханическая постоянная двигателя; *k*д *=* 1*/сe* – коэффициент усиления двигателя по управляющему воздействию;  *= R/cec*м – коэффициент усиления двигателя по нагрузке; *U*вх – напряжение якоря электродвигателя; Ω – частота вращения ротора; *М*с – момент нагрузки на валу электродвигателя.



Передаточная функция по нагрузке (возмущению):



**Заключение**

Достоверную математическую модель объекта можно найти аналитическим путем. Для этого необходимо располагать всесторонними сведениями об объекте (конструкции, законах, описывающих протекающие в нем процессы, условиях функционирования и взаимодействия со средой). Однако часто из-за отсутствия достаточных данных получить решение задачи таким путем не удается. Трудности применения аналитических методов возникают и при описании реальных объектов, процессы в которых имеют сложный характер. Поэтому в подобных случаях эти методы дополняются экспериментальными исследованиями. Преимуществом моделей, полученных теоретическим путем, как правило, является их достаточно общий вид, позволяющий рассматривать поведение объектов в различных возможных режимах.

С практической точки зрения, более привлекательны экспериментальные методы, позволяющие находить модели объектов по результатам измерения их входных и выходных переменных. Хотя эти методы также предполагают наличие априорных сведений об изучаемом объекте, но их характер может быть не столь обстоятельным. Как правило, уровень априорных сведений должен быть достаточным лишь для выбора структуры модели и условий проведения эксперимента. Построение моделей объектов на основе такого подхода обычно называют идентификацией.

**Рекомендательный библиографический список**

*Алексеев А.А.* Теория управления: Учебное пособие / А.А.Алексеев, Д.Х.Имаев, Н.Н.Кузьмин, В.Б.Яковлев; СПбГЭТУ, СПб, 1999. 435с.

*Борисов Б.М.*, Математические модели и расчет систем управления техническими объектами: Учебное пособие / Б.М.Борисов, Н.В.Пальянова, В.И.Экгардт; СПГГИ, СПб, 1999. 45с.

Наладка средств автоматизации и автоматических систем регулирования: Справочник // Под редакцией А.С.Клюева. М.: Энергоатомиздат, 1989. 368с.

*Толпежников Л.И.* Автоматическое управление процессами шахт и рудников: Учебник для вузов. М.: Недра, 1985. 352с.

#### Содержание

Введение

1. Математическое моделирование систем управления

1.1 Операторы преобразования переменных

1.2 Классы моделей

1.3 Способы построения моделей

1.4 Особенности структурных моделей систем управления

2. Линейные модели и характеристики систем управления

2.1 Модели вход-выход

2.2 Построение временных характеристик

2.3 Построение частотных характеристик

2.4 Построение моделей по системе дифференциальных уравнений

2.5 Построение моделей вход-выход по уравнениям в форме пространства состояний

2.6 Модели систем управления с раскрытой причинно-следственной структурой

2.7 Типовые звенья автоматических систем управления

2.8 Характеристики систем с типовой структурой

2.9 Неопределенность моделей систем управления

3. Нелинейные элементы систем управления

3.1 Безынерционные нелинейные элементы

3.2 Динамические нелинейные элементы

3.3 Нелинейные модели с раскрытой структурой

4. Примеры математических моделей объектов горной электромеханики

Заключение