#### МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ХПИ»**

Кафедра «Вычислительной техники и програмирования»

##### Расчётно–графическое задание

по курсу «Теория алгоритмов и вычислительные методы»

Харьков – 2005

**Исходные данные:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант №** | **y0** | **y1** | **y2** | **y3** | **y4** | **y5** | **h** | **x0** |
| 64 | -0.02 | 0.604 | 0.292 | -0.512 | -1.284 | -2.04 | 0.5 | 0.3 |

**Задача 1**

Исходные данные вводятся в ЭВМ как абсолютно точные числа и представляются в ней в виде чисел с плавающей точкой с относительной погрешностью в одну миллионную. Введенные данные x0 и y0 служат основой формирования двух векторов x=(x0, x1, …, xn) и y=(y0, y1, …, yn) по рекуррентным формулам:

# , ; , .

# Вычислить скалярное произведение *с := (x, y)* по алгоритму:

*с := 0; i := 0;*

*while i < n + 1 do c := c + xi · yi;*

и оценить аналитически и численно инструментальную абсолютную и относительную погрешности.

**Решение**

Поскольку данные представляются в ЭВМ в виде чисел с плавающей точкой с относительной погрешностью, то

x0 = x0(1+δ)

y0 = y0(1+δ)

C0 = x0y0(1+δ)



При *i = 1*



При *i = 2*

x2 = x03(1+δ)5

y2 = y0(1+δ)3

C2 = x0y0(1+δ)5 + x02(1+δ)7 + x03y0(1+δ)10

При *i = 3*

x3 = x04(1+δ)7

y3 = (1+δ)5

C3 = x0y0(1+δ)6 + x02(1+δ)8 + x03y0(1+δ)11 + x04(1+δ)14

При i *= 4*

x4 = x05(1+δ)9

y4 = y0(1+δ)7

C4 = x0y0(1+δ)7 + x02(1+δ)9 + x03y0(1+δ)12 + x04(1+δ)15 + x05y0(1+δ)18



Выявим закономерность изменения Ci:

При расчете Cn без учета погрешности исходных данных и погрешности вычисления, получим

Обозначим эту сумму как S1.

Тогда абсолютная погрешность S2



а относительная погрешность



Оценим инструментально относительную и абсолютные погрешности при n = 10

S1 = 0.0923071

S2 = 1.45914·10-6

S3 = 1.58075·10-5

**Задача 2**

Для функции g(x), заданной своими значениями в шести точках, составить таблицу всех повторных разностей. Преобразовать функцию g(x) с помощью линейного преобразования x = a + b \* k в функцию G(k) с целочисленным аргументом k. В качестве проверки правильности заполнения таблицы вычислить аналитически конечную разность Δng(x) = ΔnG(k) для n = 5.

**Решение**

Составим таблицу всех повторных разностей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | x | y | Δy | Δ2y | Δ3y | Δ4y | Δ5y |
| 0 | 0.3 | 0.02 | -1.576 | 0.044 | -0.136 | 0.66 | -0.54 |
| 1 | 1.1 | -1.556 | -1.532 | -0.092 | 0.524 | 0.12 | — |
| 2 | 1.9 | -3.088 | -1.624 | 0.432 | 0.644 | — | — |
| 3 | 2.7 | -4.712 | -1.192 | 1.076 | — | — | — |
| 4 | 3.5 | -5.904 | -0.116 | — | — | — | — |
| 5 | 4.3 | -6.02 | — | — | — | — | — |



Найдем формулу перехода от **x** к **k:**

Выполним проверку, вычислив аналитически конечную разность



Δ*ng(x)=* Δ*nG(k)* для *n = 5*:

Конечные разности, вычисленные аналитически и таблично Δ*ng(x) =* Δ*nG(k)* для *n = 5* совпали, следовательно, таблица повторных разностей составлена верно.

**Задача 3**

Таблично заданную функцию *G(k)* с целочисленным аргументом представить в виде разложения по факториальным многочленам *(z*(n) = *z · (z-1) · (z-2) · … · (z - n + 1))* и преобразовать его в степенные многочлены *G(z)* и *G(x)*.

**Решение**

Представим функцию *G(k)* в виде разложения по факториальным многочленам:



Преобразуем функцию *G(k)* в степенной многочлен *G(z)*:



Выполним проверку при k = 1:



0.604=0.604

Так как результаты совпали, значит степенной многочлен *G(z)* представлен правильно.

Преобразуем функцию G(k) в степенной многочлен G(x). Зная, что получим:



Проверим вычисления при x = 0.8:



0.6045128 ≈ 0.604

Так как результаты совпали, то вычисления сделаны верно.

**Задача 4**

Вывести аналитическое выражение суммы для функции целочисленного аргумента *G(z)*. Проверить правильность вычисления полученного выражения прямым суммированием табличных значений *G(k)*, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 (m = 5).

**Решение.**

Для вычисления значения суммы используем функцию *G(z)* в виде разложения по факториальным многочленам, полученным в задаче 3:



где



Для проверки, просуммируем значения *G(k)* из таблицы:

-0.02 + 0.604 + 0.292 - 0.512 - 1.284 - 2.04 = - 2.96

- 2.96 = - 2.96

Так как результаты вычисления аналитического выражения и суммы табличных значений *G(k)* совпали, значит аналитическое выражение для суммы выведено правильно.

**Задача 5**

Составить таблицу упорядоченных разделенных разностей для *g(x)*. Проверить правильность таблицы для разделенной разности *[x0; x1; x2; x3]* по формуле ее аналитического представления.

**Решение**

Составим таблицу упорядоченных разделенных разностей для *g(x)*:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | g(xi) | [xi; xi+1] | [xi; xi+1; xi+2] | [xi; xi+1; xi+2; xi+3] | [xi; xi+1; xi+2; xi+3; xi+4] | [xi; xi+1; xi+2; xi+3; xi+4;xi+5] |
| 0.3 | -0.02 | 1.248 | -1.872 | 0.592 | 0.0533333 | -0.1567999 |
| 0.8 | 0.604 | -0.624 | -0.984 | 0.6986666 | -0.3386666 | — |
| 1.3 | 0.292 | -1.608 | 0.064 | -0.0213333 | — | — |
| 1.8 | -0.512 | -1.544 | 0.032 | — | — | — |
| 2.3 | -1.284 | -1.512 | — | — | — | — |
| 2.8 | -2.04 | — | — | — | — | — |

Для проверки правильности заполнения таблицы разделенных разностей, вычислим разделенную разность пятого порядка по формуле ее аналитического представления:



Так как результаты вычислений совпали, значит, таблица разделенных разностей составлена правильно.

**Задача 6**

Получить интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, проходящие через первые четыре точки таблично заданной функции G(x), и сравнить их степенные представления.

**Решение**

Для нахождения интерполяционного многочлена Лагранжа используем формулу

где n = 3.



Проведем проверку вычислений, подставив *x=0.8* в интерполяционный многочлен Лагранжа, получим y1=0.604

Интерполяционный многочлен Ньютона находится по формуле:

ln(x) = g0 + (x-x0)[x0;x1] + (x-x0)(x-x1)[x0;x1;x2] + … +

+(x-x0)(x-x1)∙ …∙(x-xn-1)[x0;x1;x2;…;xn]

Подставив в формулу gi и xi получим:



Интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа совпадают.

Проведем проверку вычислений, подставив *x=0.8* в интерполяционный многочлен Ньютона, получим y1=0.604



**Задача 7.**

Вывести выражения для вычисления второй производной в точке *x=x3* в виде функций:



где *∆ng(0)* и *g(xn)* для *n = 0,1,…,5* соответственно значения разностей в точке *x = x0* и ординаты *g(xn) = gn* из задачи N2. Значения производной вычисленные по выведенным формулам, сравнить с вычисленным значением производной, найденной путем дифференцирования интерполяционного многочлена *G(x)*:



**Решение**

Для вычисления производной воспользуемся оператором дифференцирования:



Выражение для вычисления производной в точке *x0* имеет вид:

Для того, чтобы преобразовать его к выражению для вычисления производной в точке x3, применим оператор сдвига:



Для того, чтобы перейти от функции к функции воспользуемся формулой:



Получим выражения для ∆2y0:



*∆5y0 = -y0 + 5y1 – 10y2 + 10y3 – 5y4 + y5*

*∆4y0 = y0 - 4y1 + 6y2 - 4y3 + y4*

*∆3y0 = -y0 + 3y1 – 3y2 + y3*

*∆2y0 = y0 - 2y1 + y2*



Подставим эти значения в функцию:

Сравним это значение с вычисленным значением производной путем дифференцирования интерполяционного многочлена *G(x)*:

при x3 = 1.8



Значения производной равны, следовательно, вычисления сделаны верно.

**Задача 8**

Методом наименьших квадратов для таблично заданной *g(x)* получить аппроксимирующие степенные полиномы нулевой, первой, второй и третьей степеней *(Pi(x), i = 0, 1, 2, 3)* и изобразить их на одном графике.

**Решение.**

Составим таблицу степеней *x* и *xy*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | x | y | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | xy | x2y | x3y |
| 1 | 0.3 | -0.02 | 0.09 | 0.027 | 0.0081 | 0.00243 | 0.000728999 | -0.006 | -0.0018 | -0.00054 |
| 1 | 0.8 | 0.604 | 0.64 | 0.512 | 0.4096 | 0.32768 | 0.262144 | 0.4832 | 0.38656 | 0.309247 |
| 1 | 1.3 | 0.292 | 1.69 | 2.197 | 2.8561 | 3.71293 | 4.8268 | 0.3796 | 0.493479 | 0.641523 |
| 1 | 1.8 | -0.512 | 3.24 | 5.832 | 10.4976 | 18.8956 | 34.0122 | -0.9216 | -1.65888 | -2.98598 |
| 1 | 2.3 | -1.284 | 5.29 | 12.167 | 27.9840 | 64.3634 | 148.035 | -2.9532 | -6.79236 | -15.6224 |
| 1 | 2.8 | -2.04 | 7.84 | 21.952 | 61.4656 | 172.103 | 481.89 | -5.712 | -15.9936 | -44.782 |
| 6 | 9.3 | -2.96 | 18.79 | 42.687 | 103.22 | 259.405 | 669.026 | -8.73 | -23.5666 | -62.4401 |



Составим системы уравнений:

Откуда a0 = -0.93621; a1 = 3.89576; a2 = -2.8954; a3 = 0.488001

Аппроксимирующий степенной полином 3-й степени имеет вид:



P3(x) = -0.93621 + 3.89576x – 2.8954x2 + 0.488001x3

Откуда a0 = -0.0710314; a1 = 0.989486; a2 = -0.624589;

Аппроксимирующий степенной полином 2-й степени имеет вид:



P2(x) = -0.0710314 + 0.989486x – 0.624589x2

Откуда a0 = 0.974118; a1 = -0.946742;

Аппроксимирующий степенной полином 1-й степени имеет вид:

P1(x) = 0.974118 – 0.946742x

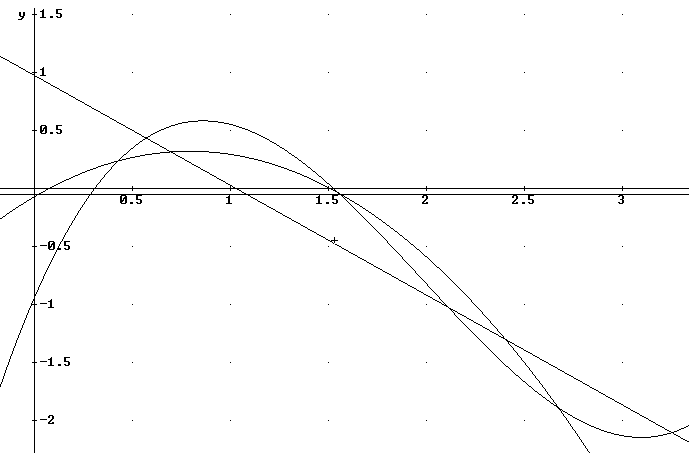
6a0 = -2.96

Откуда a0 = -0.493333;

Аппроксимирующий степенной полином 0-й степени имеет вид:

P0(x) = -0.0493333

Изобразим полученные полиномы на графике:



**Задача 9**

Для аппроксимирующего полинома третьей степени *P3(x)* получить аналитические выражения *ΔnP3(x), n = 0, 1, 2, 3, 4* и все конечно-разностные разностные кривые изобразить на одном графике.



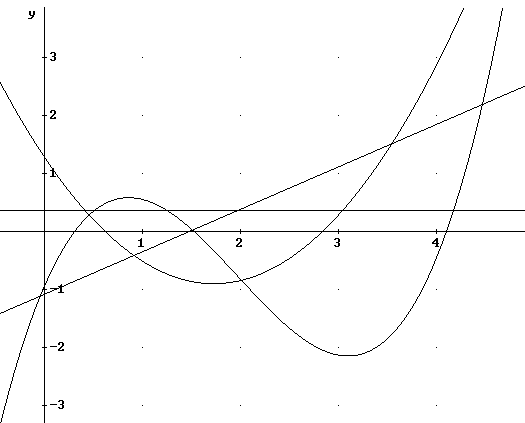
**Решение**

Обозначим на графике все конечно-разностные кривые:

*P3(x)*

*Δ2P3(x)*

*ΔP3(x)*



*Δ4P3(x)*

*Δ3P3(x)*

**Задача 10**

Вывести квадратурные формулы для вычисления определенных интегралов с пределами [0, 1] и [-1, 1] от подынтегральных функций f(t), принадлежащих классу степенных многочленов степеней 0, 1, 2, 3. Вывод проделать для трех случаев использование в квадратурных формулах численных значений подынтегральных функций:

в) заданы значения функции в точках, обеспечивающих получение формул наивысшей алгебраической степени точности.



### Решение

Значение определенного интеграла найдем, исходя из формулы:



где w1, w2 — некоторые коэффициенты

t1, t2 —точки, плавающие внутри интервала интегрирования.



Составим систему уравнений



w(t) = (t-t1)(t-t2) = C0 + C1t + C2t2 = 0

C2 = 1



Домножив уравнения на соответствующие коэффициенты получим:

2C0 + 2/3 = w1 (C0 + C1t1 + t12) + w2 (C0 + C1t1 + t22)

2C0+ 2/3 = 0

C0 = -1/3

Подставляя полученные значения в первую систему, получим:



Квадратурная формула:



**Задача 11**

С помощью квадратурных формул, полученных в задаче 10, вычислить определенный интеграл от степенного представления интерполяционного многочлена Лагранжа (Ньютона), полученного в задаче № 6 в пределах от x0 до x0 +3h, и сравнить его с аналитически вычисленным значением определенного интеграла по первообразным многочлена.

**Решение**

Используем степенное представление интерполяционного многочлена Лагранжа из задачи 6



Для перехода к интегралу с канонической формой используем линейное преобразование: x = α + βt.



Составим систему уравнений:

Подставив x = 1.05 + 0.75t, получим многочлен Лагранжа от переменной t:

L (t) = 0.24975t3 - 0.80325t2 - 0.49575t + 0.537253



Учитывая, что dx = βdt, получим:

Применим квадратурную формулу, полученную в задаче №10

Для сравнения вычислим аналитически значение интеграла:



Так как результаты совпали, значит, вычисления произведены верно.

**Задача 12**

Оценить погрешность определенного интеграла от функции sin(x) в пределах [0,2/3π] по квадратурной формуле наивысшей алгебраической степени точности, полученной в задаче № 10в, по сравнению с аналитически точным. Проделать то же самое над усеченным степенным рядом, представляющим sin(x), в который x входит со степенью не выше третьей.

**Решение**

Перейдем от пределов [0,2/3 π] к пределу [-1,1]: для этого воспользуемся линейным преобразованием x= α + βt . Составить систему



Учитывая, что dx = βdt, получим:



Применим квадратурную формулу:

Вычислим аналитически:

Найдем погрешность вычисления:

Проделаем те же операции над усеченным степенным рядом, представляющем sin(x):



Перейдем от пределов [0; 2π/3] к пределам [-1; 1], для этого используем линейное преобразование x = α +βt. Составим систему уравнений:



Учитывая, что dx = βdt, получим

Применим квадратурную формулу, получим



Найдем погрешность вычисления



**Задача 14**

Степенными полиномами Чебышева Ti относительно переменной x (|x| < 1) являются решениями линейного разностного уравнения второго порядка:

Ti+2 - 2x Ti+1 + Ti = 0,

с начальными условиями T0 = 1 и T1 = x.

Найти аналитическое выражение и вычислить значения полинома Чебышева i-й степени, если и i = 4. Проверить вычисления непосредственно по заданной рекуррентной формуле. Найти положение нулей и экстремумов у многочленов Чебышева в общем виде и для заданных выше x и i. Оценить модуль максимально возможного значения полинома в точках экстремумов.



**Решение.**



Исходя из того, что

xi = |yi| надо найти T4 т.е. для i = 4

Из Ti+2 - 2xTi+1 + Ti = 0 следует, что

T2 = 2xT1 - T0

T3 = 2xT2 - T1 = 2x(2xT1 - T0) - T1

T4 = 2xT3 - T2 = 2x(2x(2xT1 - T0) - T1) - 2xT1 + T0 = 8x3T1 - 4x2T0 - 4xT1 + T0

Подставим значение T0 = 1 и T1 = x

T4 = 8x4 - 4x2 - 4x2 + 1 = 8x4 - 8x2 + 1

Найдем значения x:



T4 = 0.99980

Проверим по заданной рекуррентной формуле:

T2 = 2·0.00490·0.00490 - 1 = -0.9999

T3 = 2·0.00490·(-0.9999) - 0.00490 = -0.01469

T4 = 2·0.00490·(-0.01469) + 0.9999 = 0.99980

Нули функции находятся, как решения биквадратного уравнения:

8x4 - 8x2 + 1 = 0, где

x1 = 0.9238795

x2 = -0.9238795

x3 = 0.3826834

x4 = -0.3826834



Чтобы найти экстремумы найдем

**Задача 16**

Выравнивание по всей длине с течением времени температуры T(x, t) на тонком однородном хорошо теплоизолированном стержне описывается дифференциальным уравнением в частных производных с начальным распределением температуры (в градусах Цельсия) по длине стержня в 6 равномерно расположенных с шагом h точках.



T(x0, 0) = T0, T(x1, 0) = T1, …, T(x5, 0) = T5; (Ti = 100·yi ˚C).

На концах стержня в точках x-1 и x6 удерживается нулевая температура.

Применяя конечно-разностное представление производных по пространственной переменной x, свести уравнение в частных производных к системе дифференциальных уравнений в обыкновенных производных относительно температуры T.

**Решение.**



Получаем систему диф. уравнений:



Учитывая начальные условия, получим систему уравнений:

**Задача 17.**

Используя метод Ньютона-Рафсона, найти с относительной погрешностью в одну миллионную нуль многочлена Чебышева Ti(x), полученного в задаче 14. В качестве начального приближения к корню взять



В качестве xi берутся |yi| из таблицы исходных данных.

**Решение.**

Из задачи 14 возьмем полином Чебышева T4 = 8x4 - 8x2 + 1. В качестве начального приближения к корню возьмем xнач, вычисленное по формуле



Т.к. 8x4 - 8x2 + 1 = 0, то можем сказать, что f(xнач + α) = 0



Воспользуемся DERIVE для нахождения корня с необходимой точностью:



получим такие значения: 0.38234, 0.382689, 0.382683, 0.382683, 0.382683.

На третьей итерации получаются значения корня с нужной точностью.

**Задача 19**

Скорость изменения переменной x(t) во времени равна функции от этой переменной f(x). Найти аналитическое выражение последней от времени, начиная с t = 0, если в начальный момент x(0) = 0. В качестве f(x) взять степенной многочлен P2(x), полученный в задаче 8. Протабулировать полученное решение с шагом h = 0.1 в интервале [0, 0.5].

**Решение**

P2(x) = -0.0710314 + 0.989486x – 0.624589x2 = f(x)



Исходя из начальных условий, т.к. dx/dt = f(x), имеем



Т.к. x = F(t), то:



Протабулируем x(t) на интервале [0; 0.5] c шагом h = 0.1:

t = 0 x = 0

t = 0.1 x = -0.0622648

t = 0.2 x = -0.137833

t = 0.3 x = -0.230872

t = 0.4 x = -0.347464

t = 0.5 x = -0.496850

**Задача 20**

Методом Эйлера в интервале [0, 0.5] с шагом h = 0.1 получить решение нелинейного дифференциального уравнения:

dx/dt = a + bx + cx2,

x(0) = 0

Коэффициенты a, b, c взять из P2(x), полученного в задаче 8.

# **Решение**

y = P2(x)



P2(x) = -0.0710314 + 0.989486x – 0.624589x2



## Общая формула для решения

x = x0 + h·P2(x0, t0)

x1 = 0 + 0.5· (-0.0710314) = -0.0355156

x2 = -0.0355156 + 0.5·(-0.0710314 + 0.989486 (-0.0355156)1 –

-0.624589· (-0.03551562) = -0.053854

x3 = -0.053854 + 0.5· (-0.0710314 + 0.989486 (-0.053854)1 –

- 0.624589 (-0.053854)2) = -0.0636315

x4 = -0.0636315 + 0.5· (-0.0710314 + 0.989486 (-0.0636315)1 –

-0.624589 (-0.0636315)2) = -0.0689304

x5 = -0.0689304 + 0.5 (-0.0710314 + 0.989486 (-0.0689304)1 –

-0. 0.624589 (-0.0689304)2) =--0.071827

**Задача 23**

Проверить заданную систему из трех векторов на линейную зависимость. При обнаружении линейной зависимости поменять местами первые компоненты векторов x1,x2 и выполнить повторную проверку. Из исходных данных векторы формируются так:

x1 = (y0,y1,y2); x2=(y3,y4,y5); x3=(h,x0,0).

На базе линейно независимой системы векторов x1, x2, x3 методом Грама-Шмидта построить ортонормированную систему трех векторов:

y1 = (y11,y21,y31); y2=(y12,y22,y32); y3=(y13,y23,y33).

На основе полученной системы векторов сформировать квадратную матрицу T = (y1,y2, y3). Вычислить det(T) и получить матрицы — обратную T-1 и транспонированную T’. Найти произведение T-1 · T, T · T’. Сделать выводы о свойствах матрицы T.

**Решение**

Исходные векторы x1 = (-0.02,0.604,0.292); x2=(-0.512,-1.284,-2.04);

x3=(0.5,0.3,0).



Составим матрицу и проверим ее на линейную зависимость:

det (A·AT) = 0.23591 > 0, значит система линейно независима.

Найдем векторы v1, v2, v3

v1 = x1

v2 = x2 + a21·v1

v3 = x3 + a32·v2 + a31·v1



v1 = (-0.02, 0.604, 0.292);

v2 = (-0.572423, 0.54078, -1.15782);

v3 = (0.471405, 0.104651, -0.184183).



Матрица T:



det(T) = -1



Ортонормированная матрица T состоит из собственных векторов. Определитель матрицы T равен 1. Если транспонировать ортогональную матрицу то она будет равна обратной. T’ = T-1. Это значит, что если умножить T·T’ = E — получим единичную матрицу.

**Задача 24**

Считая числа –1, -2, -3 собственными значениями, а векторы у1, у2, у3 из задачи 23 – собственными векторами некоторой матрицы А, найдите проекторы этой матрицы ( Р1, Р2, Р3), саму матрицу А и ей обратную А-1. Получить характеристическое уравнение матрицы А и подтвердить правильность всех промежуточных вычислений.

**Решение**



Найдем проекторы матрицы А:



Найдем обратную матрицу А-1:

Характеристическое уравнение матрицы А имеет вид:

-x3-6x2-11x-6=0;

Корни характеристического уравнения – собственные значения матрицы

x1= -1; x2= -2; x3= -3

**Задача 25**

Решить систему алгебраических уравнений А·x = b, где А- матрица коэффициентов из задачи 24, x = (x1, x2, x3) – векторы решения, b = (3, 2, 1) – вектор правых частей. Решение получить, используя обратную матрицу, полученную из задачи 24.

**Решение**

