**Кафедра высшей математики**

**Курсовая работа**

**По линейной алгебре и аналитической геометрии**

**«Кривые и поверхности второго порядка»**

Дубна 2002

**Оглавление**

Введение

Часть I. Исследование кривой второго порядка

1. Определение типа кривой с помощью инвариантов

2. Приведение к каноническому виду

3. Построение графиков

4. Вывод

Часть II. Исследование поверхности второго порядка

1. Определение типа поверхности.

2. Приведение к каноническому виду

3. Исследование формы поверхности методом сечений

4. Графики уравнения поверхности.

5. Вывод

# Введение

**Цель:**

Целью данной курсовой работы является исследование кривой и поверхности второго порядка. Закрепление теоретических знаний и практических навыков по изучению и анализу свойств кривых и поверхностей второго порядка.

**Постановка задачи:**

1. Для данного уравнения кривой второго порядка:
   1. Определить тип кривой с помощью инвариантов.
   2. При α=0 записать каноническое уравнение прямой и определить расположение центра
   3. Привести уравнение к каноническому виду, применяя параллельный перенос и поворот координатных осей.
2. Для данного уравнения плоскости второго порядка:
   1. Исследовать форму поверхности методом сечений плоскостями, построить линии, полученные в сечениях.
   2. Построить поверхность в канонической системе координат.

# Часть I. Исследование кривой второго порядка

### 

### 1. Определение типа кривой с помощью инвариантов

Для данного уравнения кривой второго порядка:

(5 - α)x2 + 4xy + 3y2 + 8x – 6y +5 = 0 (3.1)

определить зависимость типа кривой от параметра α с помощью инвариантов.

Для данного уравнения кривой второго порядка:

a11 = 5 - α, a12 = 2, a13 = 4, a22 = 2, a23 = -3, a33 = 5

Вычислим инварианты:

*I1* = a11 + a22 = (5 - α) +2 = 7 - α

*I2* == = (5 - α)2 – 4 = 6 -2α



*I2* === (5 - α)10-24-24-32-9(5 - α)-20 = -α-95



Согласно классификации кривых второго порядка:

Если *I2* = 0, то данное уравнение (3.1) определяет кривую параболического типа:

*I2* = 6 - 2α = 0, следовательно, при α = 3 уравнение определяет кривую *параболического типа*.

При α = 3 *I3* = - α - 95 = -3 - 95 = 98 ≠ 0. Значит, при α = 3 уравнение (3.1) задаёт *параболу*.

Если *I2* ≠ 0, то задаваемая кривая является центральной. Следовательно, при α ≠ 3 данное уравнение задаёт *центральную* кривую.

Если *I2* > 0, то уравнение задаёт кривую эллиптического типа:

Значит, при α < 3 уравнение (3.1) задаёт кривую *эллиптического* типа.

Если *I1 I3* < 0, то уравнение определяет эллипс:

*I1 I3* = - (7 - α)(α+95) = α2+88α-665 < 0, при решении получаем α ∈ (-95 , 7). Следовательно, при α ∈ (-95 , 3) уравнение (3.1) задаёт *эллипс*.

Если *I1 I3* > 0, то уравнение определяет эллипс:

*I1 I3* = α2+88α-665 > 0, при решении получаем α ∈ (-∞, -95). Следовательно, при α ∈ (-∞ , -95) уравнение (3.1) задаёт *мнимый эллипс*.

Если *I3* = 0, то уравнение определяет две мнимые пересекающиеся прямые:

*I3* = -α - 95 = 0, при решении получаем α - 95. Следовательно, при α = - 95 уравнение (3.1) задаёт *две мнимые пересекающиеся прямые*.

Если *I2* < 0, то уравнение задаёт кривую гиперболического типа:

Значит, при α > 3 уравнение (3.1) задаёт кривую *гиперболического* типа.

* + - 1. Если *I3* ≠ 0, то уравнение определяет гиперболу:

*I3* = -α - 95 ≠ 0, получаем α ≠ -95. Следовательно, при α ∈ (3 , +∞) уравнение (3.1) задаёт *гиперболу*.

Согласно полученным данным, построим таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| α ∈ (-∞ , -95) | α = -95 | α ∈ (-95 , 3) | α = 3 | α ∈ (3 , +∞) |
| Мнимый эллипс | Две мнимые пересекающиеся прямые | Эллипс | Парабола | Гипербола |

### 2. **Приведение к каноническому виду**

При α = 0 уравнение (3.1) принимает вид:

5x2 + 4xy + 2y2 + 8x - 6y + 5 = 0 (3.2)

Приведем уравнение кривой (3.2) к каноническому виду, применяя преобразования параллельного переноса и поворота координатных осей. Мы установили, что данная кривая — центральная, поэтому используем методику приведения к каноническому виду для уравнения центральной кривой.

1. Характеристическое уравнения для данной кривой будет иметь вид:



A(x, y) = 5x2 + 4xy + 2y2



Откуда следует, корни характеристического уравнения есть: λ1 = 1, λ2 = 6.

Расположение *эллипса* относительно начальной системы координат будет известно, если мы будем знать *координаты центра* и *угловой коэффициент вещественной* оси эллипса.

Уравнения для определения координат центра имеют вид:



Откуда мы находим x0 = - и y0 = . Следовательно, точка *O′* (-,) есть центр данной кривой.



Угловой коэффициент оси *O*′*X* можем определить по формуле:



б) Совершим *параллельный перенос* начала координат в точку *O′* (x0, y0). При этом координаты x, yпроизвольной точки плоскости в системе координат *xOy* и координаты *x*', *y*' в новой системе координат *x*'*O*'*y*' связаны соотношениями:



Подставив данные выражения в уравнение (3.1), получим:

5(x0 + x′)2 + 4(x0 + x′)(y0 + y′) + 2(y0 + y′)2 + 8(x0 + x′) - 6(y0 + y′) + 5=0

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим:

5x′2+4x′y′+2y′2+(10x0+4x0 + 8)x′ + (4x0 + 4y0 - 6)y′ + (5x02 + 4x0y0 + 2y02 + 8x0 - 6y0 + 5) = 0 (3.3)

В данном уравнении коэффициенты при x′ и y′ приравняем к нулю и получим систему уравнений:



Решив эту систему уравнений, мы получим, найденные уже раннее, координаты центра *O′* , x0 = - и y0 = . Подставив данные значения в уравнение (3.3), коэффициенты при x′ и y′ станут равными нулю, мы получим уравнение в системе координат *x*'*O*'*y*' :



5x′2 + 4x′y′ + 2y′2 + () = 0



5x′2 + 4x′y′ + 2y′2 - = 0 (3.4)



в) Так как a12 = 2 ≠ 0, то для дальнейшего упрощения необходимо произвести *поворота осей координат на угол α*. При повороте осей координат на угол *α* координаты x', y' произвольной точки М плоскости в системе координат *x*'*O*'*y*' и координаты X, Y в новой системе координат XO'Y связаны соотношениями:



Подставим данные выражения в уравнение (3.4), получим:

5(Xcosα - Ysinα)2 + 4(Xcosα - Ysinα)(Xsinα + Ycosα) + 2(Xsinα + Ycosα)2 - = 0



(5cos2α + 4sinαcosα + 2sin2α)X2 + (-6sinαcosα + 4cos2α - 4sin2α)XY +

(5sin2α - 4sinαcosα + 2cos2α)Y2 - = 0 (3.5)



В полученном выражении найдём такой угол α, чтобы коэффициент при XY стал равен нулю, для этого необходимо:

-6sinαcosα + 4cos2α - 4sin2α = 0

2tg2α + 3tgα - 2=0

Откуда, при решении, находим два значения tgα = -2 и tgα = .



В первом задании мы нашли, что угловой коэффициент *вещественной оси O'X* эллипса равен k = -2. Так как угловой коэффициент равен тангенсу, то из двух найдённых значений выберем tgα = -2. Следовательно:

cosα = , sinα =



Подставив данные значения для sinα и cosα в уравнение (3.5), коэффициент при XY станет равным нулю, получим:

()X2 + ()Y2 - = 0



X2 + 6Y2 - = 0



(3.6)



- это *каноническое уравнение* данной кривой (3.1) при α = 0.

### 

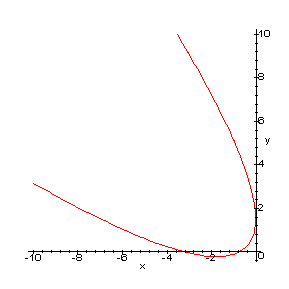
### 3. **Построение графиков**

Подтвердим результаты проведённого исследования данного уравнения кривой (3.1) второго порядка, построив соответствующие графики кривых при разных α.

При α = 3 уравнение (3.1) принимает вид:

2x2 + 4xy + 3y2 + 8x – 6y +5 = 0

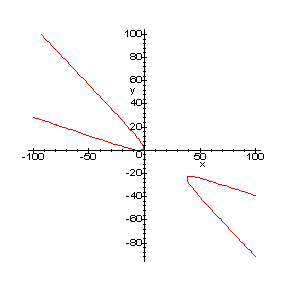
Графиком данного уравнения является парабола:



При α = 6 уравнение (3.1) принимает вид:

x2 + 4xy + 3y2 + 8y2 – 6y +5 = 0

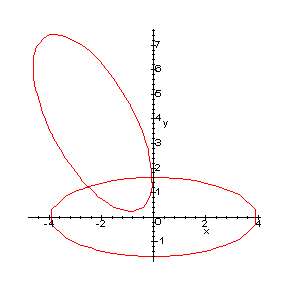
Графиком данного уравнения является гипербола:



При α = 0 уравнение (3.1) принимает вид

5x2 + 4xy + 3y2 + 8y2 – 6y +5 = 0

Графиком данного уравнения является эллипс. Изобразим в данной системе также график канонического уравнения эллипса (3.6):



**4.** **Вывод**

Исследовав данное общее уравнение кривой второго порядка, мы установили, что при значении параметра α = 0 уравнение задаёт *эллипс*. Привели уравнение к каноническому виду, применяя преобразования параллельного переноса и поворота. При параллельном переносе коэффициенты при первых степенях стали равны нулю, при повороте координатных осей коэффициенты при смешанном произведении стали равны нулю. Построили графики для всех фигур, которое может задавать данное уравнение, построили график *эллипса* в общей и канонической системе координат.

# Часть II. Исследование поверхности второго порядка

### 

### 1. **Определение типа поверхности**

Для данного уравнения поверхности второго порядка:

4x2 - z2 + 12xz + 6y - 8z + 5 = 0 (4.1)

Определить тип поверхности с помощью инвариантов.

4 + 0 -1 = 3



= - 4 – 36 = - 40



Определим характер расположения центра: Данная поверхность *не имеет центра*, так как выполняется условие *I3* = 0, *I4* ≠ 0. При этом инвариант *I4* = 360 > 0, следовательно, графиком уравнения (4.1) является *гиперболический параболоид*.

2. Приведение к каноническому виду

Совершим *параллельный перенос* начала координат в некоторую точку *O'(x0 ,y0, z0)*. При этом координаты *x, y, z* произвольной точки пространства в системе координат *Oxyz* и координаты *x', y', z'* этой же точки в новой системе координат в системе координат *O'x'y'z*' связаны соотношением:

(4.2)



Подставляя уравнения (4.2) в уравнение (4.1) получим уравнение поверхности *S* в новой системе координат *O'x'y'z'* :

4(x'+x0)2 - (z'+z0)2 + 12(x'+x0)(z'+z0) + 6y' - 8(z'+z0) + 5 = 0

4x'2 + 8x'x0 + 4x02 - z'2 - 2z'z0 - z02 + 12x'z' + 12z'z0 + 12x0z' + 12x0z0 + 6y' - 8z' - 8z0 + 5 = 0

4x'2 - z'2 + 12x'z' + 6y' + (12x0 - 2z0 - 8)z' + (8x0 + 12z0)x' + (4x02 - z02 + 12x0z0 - 8z0 +5)=0 (4.3)

Для того, чтобы новое начало координат O'(x0, y0, z0) было центром поверхности (4.1) необходимо и достаточно, чтобы в уравнении (4.3) отсутствовал член с x' и z' в первой степени:



Решая данную систему, находим x0 = и y0 = . Подставим полученные значения в уравнение (4.2):



4x'2 - z'2 + 12x'z' + 6y' + ()z' + ()x' + () = 0



4x'2 - z'2 + 12x'z' + 6y' + =0 (4.4)



Поскольку коэффициент при x'z' не равен нулю, то продолжим дальнейшее преобразование, совершив поворот осей координат на угол α. Координаты произвольной точки поверхности будут связаны следующими соотношениями:

(4.5)



Подставив выражения из (4.5) в уравнение (4.4), получим следующее:

4(Xcosα - Zsinα)2 – (Xsinα + Zcosα)2 + 12(Xcosα - Zsinα)(Xsinα + Zcosα) + 6Y + = 0



4X2cos2α - 8XZcosαsinα + 4Z2sin2α - X2sin2α - 2XZsin2α - 2XZcosαsinα -Z2cos2α + 12X2cosαsinα + 12XZcos2α - 12XZsin2α - 12Z2sinαcosα + 6Y + = 0



(4cos2α-sin2α+12cosαsinα)X2+(4sin2α-cos2α-12sinαcosα)+(-8cosαsinα-2cosαsinα+12cos2α-12sin2α)XZ+6Y+=0 (4.6)



Найдём угол α такой, что коэффициент при XZ будет равен нулю:

-8cosαsinα-2cosαsinα+12cos2α-12sin2α=0

6tg2α+5tgα-6=0

D = 25+144 = 169 = 132

Откуда следует, что tgα = или tgα = . Возьмём tgα = . Тогда найдём cosα==, sinα=. Подставим найдённые значения в уравнение (4.6):



()X2+()Z2+()XZ+6Y+=0



(4.7)



- это *каноническое уравнение* поверхности (4.1). Оно имеет сдвиг по оси O'Y на (-).



### 3. Исследование формы поверхности методом сечений

Проведём исследование графика уравнения (4.7) методом сечения плоскостями.

Рассмотрим линии , полученные в сечениях гиперболического параболоида плоскостями Y=h. Эти линии определяются системой уравнений:



Следовательно, уравнения проекций линий на плоскость *ZO'X* имеют вид:



:



Рассмотрим три случая:

Если h + >0, h >, запишем полученное уравнение в виде:



(4.8)



Уравнение (4.8) задаёт *гиперболы* с центрами в точках (0, h ,0).

Полуоси гипербол:

*a =* - действительная полуось, *b =* - мнимая полуось, увеличиваются с увеличением *h*. При различных значениях h получим семейство соответствующих гипербол:



h = 1 a=; b=;



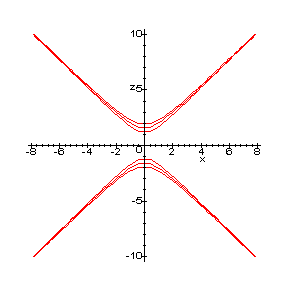
h=2 a=; b=;



h=3 a=; b=;



Изобразим данные гиперболы на рисунке:



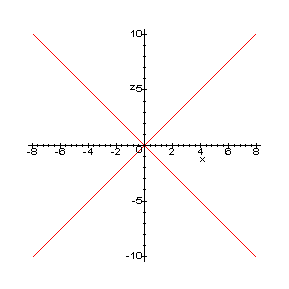
Если h + =0, h =, запишем полученное уравнение в виде:



или



Данное уравнение задаёт *две пересекающиеся прямые*. Изобразим их на рисунке:



Если h + < 0, h<, запишем полученное уравнение в виде:



Данное уравнение задаёт *сопряжённые* *гиперболы* с центрами в точке (0, h, 0).

Полуоси гипербол:

a=- действительная полуось, b=- мнимая полуось, увеличиваются с увеличением | h |.



При различных значениях h получаем семейство соответствующих гипербол:

h=-1 a=; b=;



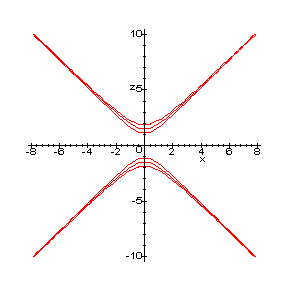
h=-2 a=; b=;



h=-3 a=; b=;



Изобразим данные гиперболы на рисунке:



Рассмотрим линии , полученные в сечениях гиперболического параболоида плоскостями Z=h. Эти линии определяются системой уравнений:



Следовательно, уравнения проекций линий на плоскость *XO'Y* имеют вид:



: (4.9)



Уравнение (4.9) задаёт *параболы*, с вершинами в точках V(0, , h) и параметром



p=. При различных h получим семейство соответствующих парабол:



h = ±1 :



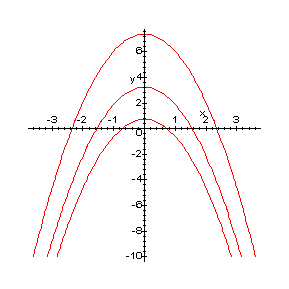
h = ±2 :



h = ±3 :



Изобразим данные параболы на рисунке:



Рассмотрим линии , полученные в сечениях гиперболического параболоида плоскостями X=h. Эти линии определяются системой уравнений:



Следовательно, уравнения проекций линий на плоскость *YO'Z* имеют вид:



(4.10)



Уравнение (4.10) задаёт параболы, с вершинами в V(h, ,0) и параметром p=. При различных h получаем семейство соответствующих парабол.



h = ±1 :



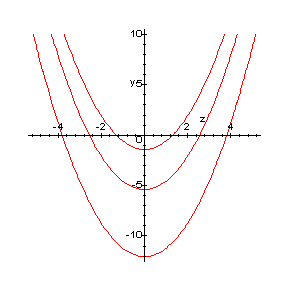
h = ±2 :



h = ±3 :



Изобразим данные параболы на рисунке:



**4. Графики уравнения поверхности**

Изобразим поверхность второго порядка в общеалгебраической и канонической системе координат.

График в общеалгебраической системе координат:

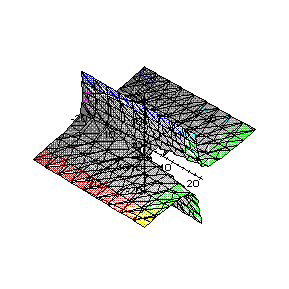
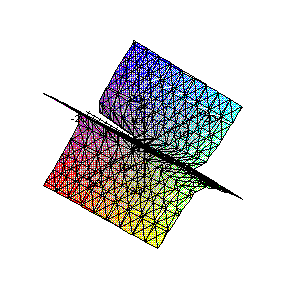


График в канонической системе координат:



### 

### 5. Вывод

Исследовав каноническое уравнение (4.7) гиперболического параболоида, отметим следующее:

Оси O'Z и O'X являются осями симметрии поверхности. Центра симметрии у поверхности нет.

Рассекая поверхность горизонтальными плоскостями Y = h, в сечениях получаем:

h > - гиперболы с действительными осями, параллельными оси O'Z



h = - две пересекающиеся прямые



h < - сопряжённые гиперболы с действительными осями, параллельными оси O'Y



Рассекая поверхность плоскостями Z = h и X = h, в сечениях получаем параболы, с ветвями, направленными вниз (Z = h) или вверх (X = h).

Поверхность гиперболического параболоида бесконечна в направлении всех трёх координатных осей.

# Список литературы

1. Копылова Т. В. Аналитическая геометрия. — Дубна: Международный университет природы, общества и человека «Дубна», 1997.
2. Ильин В. А., Позняк Г. Д. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1974.