**Реферат з курсу “Введение в численные методы”**

**Тема: “КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ”**

**Содержание**

1. Приведение к системе уравнений первого порядка

2. Разностное представление систем дифференциальных уравнений

3. Разностные системы уравнений для краевых задач

4. Краевые задачи второго порядка

5. Разностные схемы для уравнений в частных производных

6. Повышение точности разностных схем

7. Сеточные методы для нестационарных задач

Литература

1. **Приведение к системе уравнений первого порядка**

Для решения систем дифференциальных уравнений высокого порядка методами конечных разностей в первую очередь возникает потребность преобразования исходной системы в систему дифференциальных уравнений первого порядка с соответствующим образом преобразованными начальными или граничными условиями. И уже далее реализовывать численную процедуру решения.

Преобразование в систему уравнений первого порядка не единственно. Наиболее популярные из них в большинстве своем касаются линейных систем с постоянными или переменными коэффициентами. Основная идея всех методов состоит во введении новых переменных и выполнении замены высших производных этими переменными.

Пусть неоднородное дифференциальное уравнение высокого порядка задано в виде:



где – соответственно *i-*тая производная искомого решения и ее значение в начальный момент,



– функция, описывающая внешнее воздействие на динамический объект.



Обозначим первую производную искомой функции новой переменной , первую производную – следующей переменной: , первую производную – переменной и т.д.. Таким образом из исходной системы мы сформируем дифференциальное уравнение первого порядка:



При таких заменах производных искомой функции ее *n*-ная производная оказывается равной первой производной от :



В результате, эквивалентная система дифференциальных уравнений первого порядка примет следующий вид:



В случае, когда правая часть представлена взвешенной суммой функции и ее производных и в целом дифференциальное уравнение имеет вид



то его преобразование в систему уравнений первого порядка с новыми переменными осуществляется по следующим формулам:



Такое преобразование сохраняет коэффициенты исходного уравнения неизменными и исключает производные в правой части от . Начальные условия для новых переменных здесь приходится пересчитывать по достаточно сложным соотношениям.



И, наконец, приведем еще один вариант разложения на систему уравнений первого порядка исходного неоднородного уравнения с производными в правой части:



Замена переменных в отличие от предыдущего случая производится без сохранения коэффициентов исходного уравнения:



Производные искомой функции можно выразить через вновь введенные переменные путем многократного дифференцирования левой и правой части соотношения для *y* с подстановкой после каждого дифференцирования производных :



Умножив каждое выражение для на коэффициенты и просуммировав правые и левые члены равенств, получим уравнение, которое отличается от исходного лишь коэффициентами при производных в правых частях. Чтобы добиться тождественности, необходимо коэффициенты при соответствующих производных приравнять и разрешить полученную систему уравнений относительно неизвестных .



Система уравнений имеет вид:



В векторно-матричной форме это уравнение и его решение записываются в следующем виде:



где – вектор известных коэффициентов,



– вектор искомых коэффициентов,



– соответственно прямая и обратная верхне-треугольные матрицы коэффициентов. Первая из них выглядит так:



.



Обратная матрица удобна при использовании математических пакетов для решения векторно-матричного уравнения. Если , то коэффициенты легко вычисляются последовательной подстановкой значений , начиная с .



Начальные условия для вычисляются по выражениям для следующим образом:



или в векторно-матричной форме:

,



.



2. **Разностное представление систем дифференциальных уравнений**

Представление системы дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями



можно заменить системой конечно-разностных уравнений первого порядка с целочисленной независимой переменной *i* ():



,



погрешность аппроксимации которого пропорциональна сеточному шагу *h*.

Выше было уже показано, как можно уменьшить погрешность аппроксимации, делая ее пропорциональной . В частности это можно сделать, использовав среднее арифметическое двух разностей первого порядка: “вперед” и “ назад”.



При такой замене производной мы получаем систему разностных уравнений, состоящую из разностных уравнений второго порядка, требующих, кроме известного вектора начальных условий , еще один дополнительный вектор :



.



Дополнительный вектор начальных условий достаточно вычислить по формуле Эйлера. Он и определит дополнительное начальное условие с ошибкой, пропорциональной второй степени *h*:



Подстановка таких начальных условий в решение сохранит погрешность результатов на уровне . В таком случае говорят, что разностная схема имеет второй порядок точности.



3. **Разностные системы уравнений для краевых задач**

Исходные дифференциальные уравнения во многих физических и технических применениях решаются для случаев, когда заданы значения искомых функции и/или ее производных в различных точках интервала интегрирования и, в частности - на концах интервала. Такого рода уравнения в обыкновенных производных или системы из таких уравнений называются краевой задачей.

Общим методом решения краевой задачи является преобразование ее в систему алгебраических уравнений относительно множества неизвестных значений искомой функции, выбранных в точках, равномерно расположенных на оси абсцисс, т.е. заданных на сетке известных значений независимой переменной.

Для линейной системы уравнений первого порядка, записанной в матричной форме относительно вектора как



,



обязательно задается полный набор краевых условий , включающий хотя бы одно значение , или набор комбинаций из значений и



Обычно задаваемое граничное значение совмещается с тем или иным *n-*ным сеточным значением независимой переменной. Это позволяет обходиться без преобразования граничных условий к ближайшей точке сетки. Векторы , , и матрица в общем случае приводятся к единичному интервалу изменения независимой переменной с помощью линейного преобразования , в котором с шагом по оси абсцисс равном . Благодаря этому производные в левых частях единообразно заменяются (*M+*1)-точечными конечно-разностными выражениями через искомые значения решения:



.



Многоточечные представления производных получаются путем применения существующих соотношений между операторами дифференцирования, конечных разностей и сдвига:



Чтобы выразить значение производной порядка *k* в *m*-той точке целочисленного интервала [0, *n*] через ординаты функции необходимо выполнить следующие операторные преобразования:



Заменив конечно-разностные операторы (после приравнивания нулю разностей со степенями выше *n*) выражениями с оператором сдвига и вспомнив, что , получим в результате для *k*-той производной в *m-*той точке взвешенную сумму из ординат искомой функции:



.



Погрешность аппроксимации дифференциального оператора конечно-разностным оператором для центральной точки (*m=n/*2) пропорциональна с наименьшим коэффициентом величине и c наибольшим – для точек конца интервала.



Часто применяемые выражения конечно-разностной аппроксимации производных первого и второго порядков по трем-семи равномерно расположенным точкам приведены ниже в таблицах в виде коэффициентов, стоящих перед соответствующими ординатами функции. В левом верхнем углу таблиц записан общий множитель, а в крайней правой колонке – коэффициенты *k*1, *k*2для формул погрешности.

Трех точечная аппроксимация первой производной

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *y(0)* | *y(1)* | *y(2)* |  |
| *y’(0)* | -3 | 4 | -1 | 2 |
| *y’(1)* | -1 | 0 | 1 | -1 |
| *y’(2)* | 1 | -4 | 3 | 2 |

Четырех точечная аппроксимация первой производной

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | -11 | 18 | -9 | 2 | -3 |
|  | -2 | -3 | 6 | -1 | 1 |
|  | 1 | -6 | 3 | 2 | -1 |
|  | -2 | 9 | -18 | 11 | 3 |

Пятиточечная аппроксимация первой производной

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | -25 | 48 | -36 | 16 | -3 | 12 |
|  | -3 | -10 | 18 | -6 | 1 | -3 |
|  | 1 | -8 | 0 | 8 | -1 | 2 |
|  | -1 | 6 | -18 | 10 | 3 | -3 |
|  | 3 | -16 | 36 | -48 | 25 | 12 |

Шести точечная аппроксимация первой производной

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | -137 | 300 | -300 | 200 | -75 | 12 | -10 |
|  | -12 | -65 | 120 | -60 | 20 | -3 | 2 |
|  | 3 | -30 | -20 | 60 | -15 | 2 | -1 |
|  | -2 | 15 | -60 | 20 | 30 | -3 | 1 |
|  | 3 | -20 | 60 | -120 | 65 | 12 | -2 |
|  | -12 | 75 | -200 | 300 | -300 | 137 | 10 |

Семи точечная аппроксимация первой производной

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | -147 | 360 | -450 | 400 | -225 | 72 | -10 | 60 |
|  | -10 | -77 | 150 | -100 | 50 | -15 | 2 | -10 |
|  | 2 | -24 | -35 | 80 | -30 | 8 | -1 | 4 |
|  | -1 | 9 | -45 | 0 | 45 | -9 | 1 | -3 |
|  | 1 | -8 | 30 | -80 | 35 | 24 | -2 | 4 |
|  | -2 | 15 | -50 | 100 | -150 | 77 | 10 | -10 |
|  | 10 | -72 | 225 | -400 | 450 | -360 | 147 | 60 |

Трех точечная аппроксимация второй производной

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | 1 | -2 | 1 | -12 , 2 |
|  | 1 | -2 | 1 | 0 , -1 |
|  | 1 | -2 | 1 | 12 , -2 |

Четырех точечная аппроксимация второй производной

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 2 | -5 | 4 | -1 | 55 , -6 |
|  | 1 | -2 | 1 | 0 | -5 , -2 |
|  | 0 | 1 | -2 | 1 | -5 , -2 |
|  | -1 | 4 | -5 | 2 | 55 , -6 |

Пятиточечная аппроксимация второй производной

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 35 | -104 | 114 | -56 | 11 | -150 , 12 |
|  | 11 | -20 | 6 | 4 | -1 | 15 , -3 |
|  | -1 | 16 | -30 | 16 | -1 | 0 , 2 |
|  | -1 | 4 | 6 | -20 | 11 | 15 , 3 |
|  | 11 | -56 | 114 | -104 | 35 | 150 , -12 |

Шести точечная аппроксимация второй производной

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 225 | -770 | 1070 | -780 | 305 | -50 |
|  | 50 | -75 | -20 | 70 | -30 | 5 |
|  | -5 | 80 | -150 | 80 | -5 | 0 |
|  | 0 | -5 | 80 | -150 | 80 | -5 |
|  | 5 | -30 | 70 | -20 | -75 | 50 |
|  | -50 | 305 | -780 | 1070 | -770 | 225 |

Семи точечная аппроксимация второй производной

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 812 | -3132 | 5265 | -5080 | 2970 | -972 | 137 |
|  | 137 | -147 | -255 | 470 | -285 | 93 | -13 |
|  | -13 | 228 | -420 | 200 | 15 | -12 | 2 |
|  | 2 | -27 | 270 | -490 | 270 | -27 | 2 |
|  | 2 | -12 | 15 | 200 | -420 | 228 | -13 |
|  | -13 | 93 | -285 | 470 | -255 | -147 | 137 |
|  | 137 | -972 | 2970 | -5080 | 5265 | -3132 | 812 |

Например, производная первого порядка в точках *m*=0, 3, 5 для семи точечной аппроксимации будет иметь вид:



,



.



Аналогично выписываются выражения и для вторых производных в точках 0 и 2:



Таким образом, из приведенных таблиц можно выбрать аппроксимирующие выражения для производной в данной точке, включающие значения функции в точках нужного окружения.

4. **Краевые задачи для уравнений второго порядка**

При математическом описании реальных физических объектов чаще всего приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями в обыкновенных или частных производных второго порядка с начальными, краевыми или граничными условиями.

Преобразование их в конечно-разностную систему алгебраических уравнений осуществляется аналогично: для каждой точки в области (интервале) интегрирования, где не задано краевое или граничное значение искомой функции, записывается исходное уравнение, в котором все производные выражены через заранее определенное число близлежащих ординат искомой функции, принадлежащих области, и вычислены все коэффициенты и функции независимых переменных в этой точке. К полученным таким образом уравнениям добавляются соотношения или значения функции и ее производных в точках границы области. В результате будет сформирована алгебраическая система уравнений с числом уравнений и неизвестных, равном общему числу точек области интегрирования.

В процессе формирования уравнений особое внимание необходимо обращать на замену производных конечно-разностными эквивалентами в приграничных точках. В выражениях последних должны отсутствовать неизвестные значения функции в точках, расположенных вне области интегрирования. Это достигается многократным применением оператора сдвига к соответствующему конечно-разностному оператору.

Если в центральных точках точность аппроксимации производных с *n* точками удовлетворяет поставленным требованиям и эту точность желательно сохранить и в приграничных точках заданных областей, то для последних выбирают аппроксимирующие формулы, построенные для (*n*+1)*-*й точки или более.

Рассмотрим примеры аппроксимации дифференциальных уравнений с краевыми условиями конечно-разностной системой алгебраических уравнений. Эти аппроксимации в литературе получили название "разностные схемы". Ниже в четырех таблицах приведены четыре варианта конечно-разностной аппроксимации одной и той же краевой задачи, для которой известно точное решение. Вид уравнения, условия на границе интервала, решение аналитическое и вычисленное в заданных точках с 12 значащими цифрами приведены в правой крайней колонке первой таблицы. В левых колонках первой и в трех остальных таблицах записаны системы алгебраических уравнений, полученных применением трех-, пяти-, пяти-шести- и семи точечной аппроксимации второй производной в заданном уравнении. Справа от уравнений приведены решения алгебраических уравнений тоже с 12-ю значащими цифрами.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Система уравнений с трехточечным представлением производных | Вектор разностного решения с шагом *h*=*0.1* |  |
| *-199+100+0.1=0* | 0.0186590989712 | 0.0186415437361 |
| *100-199+100+0.2=0* | 0.0361316064473 | 0.0360976603850 |
| *100-199+100+0.3=0* | 0.0512427953890 | 0.0511947672548 |
| *100-199+100+0.4=0* | 0.0628415300546 | 0.0627828520998 |
| *100-199+100+0.5=0* | 0.0698118753674 | 0.0697469636621 |
| *100-199+100+0.6=0* | 0.0710840847137 | 0.0710183518969 |
| *100-199+100+0.7=0* | 0.0656455142231 | 0.0655851465687 |
| *100-199+100+0.8=0* | 0.0525504484304 | 0.0525024675253 |
| *100-199+0.9=0* | 0.0309298757856 | 0.0309018656257 |

|  |  |
| --- | --- |
| Система уравнений для пяти-точечного  представления производных | Вектор решения |
| *-9940+3000+2000-500+6=0* | 0.0186406186406 |
| *8000-14940+8000-500+12=0* | 0.0360968696594 |
| *-500+8000-14940+8000-500+18=0* | 0.0511941848390 |
| *-500+8000-14940+8000-500+24=0* | 0.0627825213460 |
| *-500+8000-14940+8000-500+30=0* | 0.0697468774179 |
| *-500+8000-14940+8000-5008+36=0* | 0.0710184988305 |
| *-500+8000-14940+8000-500+42=0* | 0.0655854996422 |
| *-500+8000-14940+8000+48=0* | 0.0525029672554 |
| *-500+2000+3000-9940+54=0* | 0.0309024932693 |

|  |  |
| --- | --- |
| Система уравнений для пяти- и шести точечного представления производных | Вектор решения |
| *-3720-1000+3500-1500+250+3=0* | 0.0186415486274 |
| *8000-14940+8000-500+12=0* | 0.0360976918947 |
| *-500+8000-14940+8000-500+18=0* | 0.0511948294923 |
| *-500+8000-14940+8000-500+24=0* | 0.0627829167486 |
| *-500+8000-14940+8000-500+30=0* | 0.0697469746974 |
| *-500+8000-14940+8000-500+36=0* | 0.0710183243686 |
| *-500+8000-14940+8000-500+42=0* | 0.0655851063829 |
| *-500+8000-14940+8000+48=0* | 0.0525024168959 |
| *250-1500+3500-1000-3720+27=0* | 0.0309018105849 |

|  |  |
| --- | --- |
| Система уравнений для семиточечного представления производных | Вектор решения |
| *-7260-12750+23500-14250+4650-650+9=0* | 0.0186415513486 |
| *11400-20910+10000+750-600+100+18=0* | 0.0360976659970 |
| *-1350+13500-24410+13500-1350+100+27=0* | 0.0511947713313 |
| *10-135+1350-2441+1350-135+10+3.6=0* | 0.0627828547351 |
| *10-135+1350-2441+1350-135+10+4.5=0* | 0.0697469648318 |
| *10-135+1350-2441+1350-135+10+5.4=0* | 0.0710183515790 |
| *100-1350+13500-24410+13500-1350+63=0* | 0.0655851447467 |
| *100-600+750+10000-20910+11400+72=0* | 0.0525024640963 |
| *-650+4650-14250+23500-12750-7260+81=0* | 0.0309018602217 |

В этой задаче весь интервал интегрирования [0,1] был разбит на 10 равных частей с шагом *h*=0.1. Из одиннадцати точек в двух крайних искомая функция *x*(*t*) была задана, поэтому уравнения записывались для девяти внутренних точек, в которых значения функции требовалось найти.

5. **Разностные схемы для уравнений в частных производных**

Конечно-разностная аппроксимация дифференциальных уравнений в частных производных, называемая в литературе *методом сеток*, использует те же конечно-разностные выражения производных через значения искомой функции, которые приведены в таблицах выше. Однако есть особенности, которые связаны с наличием у каждой рассматриваемой точки соседних точек не только по направлениям осей независимых переменных, но и во множестве других наклонных направлений.

Поэтому, в случае использования многоточечных (более трех точек) формул для производных, выражения последних могут разрабатываться дополнительно для каждого применения.

Наиболее удобным в разработке многоточечных конечно-разностных выражений для уравнений в частных производных является операторный метод, основанный на учете взаимосвязи оператора дифференцирования с операторами сдвига по направлениям различных независимых переменных. Рассмотрим его применение на примере построения разностных формул для двумерных уравнений в частных производных второго порядка.

Характерным представителем уравнений в частных производных второго порядка является уравнение Лапласа:



,



где – непрерывная функция, заданная на границе области.



Область численного решения уравнения разобьем на клетки системой вертикальных и горизонтальных прямых, проходящих через равномерно расположенные с шагом *h* точки на осях координат соответственно *x* и *y*:



Значения функции в узлах сетки обозначим через и для каждой точки области решений частные производные из уравнения заменим соответствующим (например, трех точечным) симметричным конечно-разностным выражением для внутренних точек и для точек вблизи границ таким несимметричным, чтобы значения функций не выходили за пределы области:



После подстановки в уравнение Лапласа этих выражений для каждой внутренней точки области будет получена система алгебраических уравнений следующего вида:



В качестве примера, демонстрирующего применение метода сеток, приведем решение уравнения Лапласа для прямоугольной области с количеством узлов и значениями функции на границе, как показано ниже:



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| u(0,0) | 0.5 | 0.476 | 0.404 | 0.294 | 0.154 | 0 |
| 0.5 | u(1,1) | u(1,2) | u(1,3) | u(1,4) | u(1,5) | 0 |
| 0.476 | u(2,1) | u(2,2) | u(2,3) | u(2,4) | u(2,5) | 0 |
| 0.404 | u(3,1) | u(3,2) | u(3,3) | u(3,4) | u(3,5) | 0 |
| 0.294 | u(4,1) | u(4,2) | u(4,3) | u(4,4) | u(4,5) | 0 |
| 0.154 | u(5,1) | u(5,2) | u(5,3) | u(5,4) | u(5,5) | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Уравнения для 25 внутренних точек *u*(*i,k*):

|  |  |
| --- | --- |
| 0.5-4·u(1,1)+u(1,2)+u(2,1) +0.5=0,  u(1,1)-4·u(2,1)+u(2,2)+u(3,1)+0.476=0,  u(2,1)-4·u(3,1)+u(3,2)+u(4,1)+0.404=0,  u(3,1)-4·u(4,1)+u(4,2)+u(5,1)+0.294=0,  u(4,1)-4·u(5,1)+u(5,2)+0.154=0,  0.476+u(1,1)-4·u(1,2)+u(1,3)+u(2,2)=0,  u(1,2)+u(2,1)-4·u(2,2)+u(2,3)+u(3,2)=0,  u(2,2)+u(3,1)-4·u(3,2)+u(3,3)+u(4,2)=0,  u(3,2)+u(4,1)-4·u(4,2)+u(4,3)+u(5,2)=0,  u(4,2)+u(5,1)-4·u(5,2)+u(5,3)=0,  0.404+u(1,2)-4·u(1,3)+u(1,4)+u(2,3) =0,  u(1,3)+u(2,2)-4·u(2,3)+u(2,4)+u(3,3)=0,  u(2,3)+u(3,2)-4·u(3,3)+u(3,4)+u(4,3)=0 | u(3,3)+u(4,2)-4·u(4,3)+u(4,4)+u(5,3)=0,  u(4,3)+u(5,2)-4·u(5,3)+u(5,4)=0,  0.294+u(1,3)-4·u(1,4)+u(1,5)+u(2,4) =0,  u(1,4)+u(2,3)-4·u(2,4)+u(2,5)+u(3,4)=0,  u(2,4)+u(3,3)-4·u(3,4)+u(3,5)+u(4,4)=0,  u(3,4)+u(4,3)-4·u(4,4)+u(4,5)+u(5,4)=0,  u(4,4)+u(5,3)-4·u(5,4)+u(5,5)=0,  0.154+u(1,4)-4·u(1,5)+u(2,5) =0,  u(1,5)+u(2,4)-4·u(2,5)+u(3,5)=0,  u(2,5)+u(3,4)-4·u(3,5)+u(4,5)=0,  u(3,5)+u(4,4)-4·u(4,5)+u(5,5)=0,  u(4,5)+u(5,4)-4·u(5,5)=0. |

Результат решения системы из 25 уравнений представлен в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| u(0,0) | 0.5 | 0.476 | 0.404 | 0.294 | 0.154 | 0 |
| 0.5 | 0.444618 | 0.389236 | 0.316975 | 0.225193 | 0.116966 | 0 |
| 0.476 | 0.389236 | 0.319355 | 0.249474 | 0.172833 | 0.0886772 | 0 |
| 0.404 | 0.316975 | 0.249474 | 0.188730 | 0.127986 | 0.0649079 | 0 |
| 0.294 | 0.225193 | 0.172833 | 0.127986 | 0.0854773 | 0.0429672 | 0 |
| 0.154 | 0.116966 | 0.0886772 | 0.0649079 | 0.0429672 | 0.0214836 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Следует отметить, что в трех точечном представлении конечно-разностные выражения производных второго порядка для внутренних и приграничных точек совпадают. Это позволяет для прямоугольных областей, заменив двумерную индексацию неизвестных одномерной



,



преобразовать систему уравнений в векторно-матричную форму записи с блочно-диагональной матрицей коэффициентов, которая удобна для решения алгебраических уравнений с числом неизвестных более 100 на векторных вычислительных машинах:

,



, , *I*



– матрицы, соответственно, блочная, коэффициентов и единичная;

, , ,



, ,



– соответственно, векторы неизвестных и правых частей уравнения со своими блочными компонентами.

В конечно-разностном представлении уравнения Лапласа каждое уравнение является для соответствующей точки области формулой вычисления среднего арифметического совокупности значений функции в соседних точках:

.



Погрешность конечно-разностного представления уравнения Лапласа в виде системы алгебраических уравнений определяется погрешностью аппроксимации производных, которая для трех точечного варианта, приведенного выше, пропорциональна шагу сетки.

Естественно желание повысить точность аппроксимации лапласиана, добавив в структуру его конечно-разностного представления значения функции в дополнительных точках при сохранении суммирования значений из окружающих точек.

6. **Повышение точности разностных схем**

Оператор сдвига, преобразующий значение функции в точке *z* в значение функции в точке *z+h* выражается через оператор производной , как , а его применение представляется выражением:



Обозначив операторные выражения для сдвига значений функции по осям *x, y* соответственно



несложно записать с их помощью следующие операторные выражения:



Во фрагменте сетки, изображенной в виде таблицы , для каждой представленной индексом точки записано значение функции, выраженное через значение функции в центральной точке, преобразованное соответствующими операторами сдвига:



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Вычислим суммы значений функций, симметрично располагающихся вокруг центральной точки:



Подобными преобразованиями операторных выражений можно получить формулы для следующих сумм:

и любых других.



Включая выражения для частичных сумм в единую сумму с различными весовыми коэффициентами, пренебрегая выражениями с производными и лапласианами высоких порядков, получают конечно-разностные формулы, аппроксимирующие уравнение Лапласа в заданной точке и содержащие большее число значений искомой функции.

Например, из выражения для непосредственно следует



что, после пренебрежения слагаемыми в правой части, полностью соответствует трех точечной разностной аппроксимации частных производных. Суммируя и с весами соответственно 4 и 1, получим аппроксимацию производных по значениям в восьми точках:



Если значения частных производных в точках области решения малы, то радикальным способом увеличения точности аппроксимации уравнения является уменьшение шага сетки.

При задании в правой части уравнения Лапласа функции *g*(*x,y*) последняя в приведенных конечно-разностных суммах должна заменить на , – на и т.д.:



7. **Сеточные методы для нестационарных задач**

Уменьшение величины шага приводит к квадратичному возрастанию числа точек в области решения, а следовательно, к порядку алгебраической системы уравнений. Одним из путей уменьшения числа уравнений является метод прямых, который позволяет аппроксимировать дифференциальное уравнение в частных производных системой дифференциальных уравнений в обыкновенных производных с краевыми условиями. Для этого частные производные по одной из независимых переменных не заменяют конечно-разностным эквивалентом. Если в уравнении оставлена пространственная переменная, то получаемая система будет краевой задачей со всеми сложностями ее решения, рассмотренными ранее.

Существенным будет выигрыш лишь при решении дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нестационарные процессы. К ним относятся уравнения, подобные уравнениям теплопроводности и волновому. Этим уравнениям кроме условий на границе задают еще и начальное распределение искомой функции во всех точках области решения.

Применение метода прямых рассмотрим на примере решения уравнения теплопроводности следующего вида:

,



которое описывает распространение тепла (изменение температуры) вдоль металлического стержня, вваренного своими концами в две металлические пластины с разными, постоянно поддерживаемыми на них температурами. Коэффициент B, характеризующий свойства материала, возьмем равным 1.

Пусть расстояние между пластинами равно единице, т.е. , значения температуры на пластинах и начальное распределение температуры по длине .



Разобьем единичную длину стержня на 8 равных частей (*h*=1/8)и обозначим значение температуры в каждой точке через , *k=*0,1,..., Применим пяти- и шести точечную аппроксимацию частной производной второго порядка: первую симметричную - для внутренних точек, и вторую (несимметричную) – для приграничных точек . Температуры в точках с *k*=0и *k*=8 заданы: 100° и 0°.



После замены производных конечно-разностными эквивалентами получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями в векторно-матричной форме:



Чтобы получить представление о влиянии порядка разностных формул на вид записи и точность решения задачи, в таблице приведены системы уравнений для 5- и 3-точечных выражений частных производных:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Произ-водная |  |  |  |
| T1’= | -15T1-4T2+14T3-6T4+T5+1000 | -20T1+6T2+4T3-T4+1100 | -2T1+T2+100 |
| T2’= | 16T1-30T2+16T3-T4-100 | 16T1-30T2+16T3-T4-100 | T1-2T2+T3 |
| T3’= | -T1+16T2-30T3+16T4-T5 | -T1+16T2-30T3+16T4-T5 | T2-2T3+T4 |
| T4’= | -T2+16T3-30T4+16T5-T6 | -T2+16T3-30T4+16T5-T6 | T3-2T4+T5 |
| T5’= | -T3+16T4-30T5+16T6-T7 | -T3+16T4-30T5+16T6-T7 | T4-2T5+T6 |
| T6’= | -T4+16T5-30T6+16T7 | -T4+16T5-30T6+16T7 | T5-2T6+T7 |
| T7’= | T3-6T4+14T5-4T6-15T7 | -T4+4T5+6T6-20T7 | T6-2T7 |

Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно решать любым из рассмотренных ранее численным методом. Правда, появляется особенность в выборе шага интегрирования по времени, который теперь зависит еще и от шага разбиения области решения по пространственной переменной. В случае аппроксимации производной по времени конечными разностями “вперед” соотношение между шагом по временной переменной и по пространственной должно подчиняться следующему неравенству: . При несоблюдении неравенства решение будет численно неустойчивым и интегрирование по времени с каждым шагом будет давать неограниченно возрастающие значения.



В рассматриваемом примере =0,015625, поэтому интегрирование трех систем по формулам Рунге-Кутта было выполнено с шагом по времени = 0,001 до значения 0,01 и с шагом 0,005 – до значения времени, равного 0,75. Выборка ряда значений температуры из решений в интервале времени (0,0.75] показана в таблице колонками из трех чисел, соответствующих сверху-вниз трем приведенным выше системам.



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0.01 | 36.32  36.82  23.97 | 152  466  3.434 | 0.9573  1.038  0.3456 | -0.005579  0.004583  0.02668 | -0.02021  -0.02009  0.001666 | -0.001651  -0.002840  73610^(-5) | 0.009336  -0.0001931  3.93410^(-6) |
| 0.02 | 52.52  52.39  37.89 | 20.86  21.00  9.682 | 6.165  6.287  1.825 | 1.298  1.347  0.2702 | 0.1715  0.1810  0.0328 | 0.01656  0.002515  0.003367 | 0.03366  -0.01559  0.0002973 |
| 0.05 | 69.3  69.17  57.27 | 42.88  42.79  26.61 | 23.52  23.50  10.15 | 11.37  11.37  3.243 | 4.821  4.826  0.884 | 1.773  1.767  0.2089 | 0.5202  0.5142  0.04223 |
| 0.1 | 77.99  77.98  69.09 | 57.61  57.58  42.81 | 40.14  40.12  23.71 | 26.27  26.25  11.75 | 16  15.99  5.222 | 826  829  2.076 | 3.842  3.854  0.6867 |
| 0.25 | 85.43  85.43  80.18 | 71.18  71.18  61.57 | 57.51  57.51  45.12 | 44.6  44.60  31.4 | 32.51  32.51  20.52 | 21.18  21.18  12.13 | 10.43  10.43  5.581 |
| 0.5 | 87.32  87.32  85.39 | 74.67  74.67  71.1 | 62.07  62.07  57.41 | 49.54  49.54  44.5 | 37.07  37.07  32.42 | 24.67  24.67  21.11 | 12.32  12.32  10.39 |
| 0.75 | 87.48  87.48  86.87 | 74.97  74.97  73.84 | 62.46  62.46  60.99 | 49.96  49.96  437 | 37.46  37.46  35.99 | 24.97  24.97  23.84 | 12.48  12.48  11.87 |

Как видно, трех точечная аппроксимация по сравнению с пятиточечной дает худший результат. Точное решение в установившемся режиме дает изменение температуры на каждой одной восьмой длины стержня 12,5°С. Пятиточечная аппроксимация в данной задаче дала погрешность в сотые доли процента.

**Литература**

1. Калашников В. И. Введение в численные методы: Учеб. пособие. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2002. – 132 с.
2. Рено Н.Н. АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ: МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ. Изд-во: "Книжный дом Университет" (КДУ), 2007. – 24с.
3. Самарcкий А. А. Задачи и упражнения по численным методам. Изд.3 Изд-во: КомКнига, ЛКИ, 2006. – 208с.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы Учебное пособие для вузов 3-е изд.,стер. ЛАНЬ, 2005. – 288с.
5. Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов. Изд-во: ФИЗМАТЛИТ®, 2003. – 304с.
6. Тыртышников Е.Е. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА (1-Е ИЗД.) УЧЕБ. ПОСОБИЕ Издательство "Академия/Academia", 2007. – 320с.