Министерство образования Российской Федерации

Муниципальное общеобразовательное учреждение

"Средняя общеобразовательная школа №22"

**Квадратные уравнения и уравнения высших порядков**

Выполнили:

Ученики 8 "Б" класса

Кузнецов Евгений и Руди Алексей

Руководитель:

Зенина Алевтина Дмитриевна

преподаватель математики

Тюмень

2005

**Оглавление**

Введение

Глава 1. История квадратных уравнений и уравнений высших порядков

* 1. Уравнения в Древнем Вавилоне
  2. Уравнения арабов
  3. Уравнения в Индии

Глава 2. Теория квадратные уравнения и уравнения высших порядков

* 1. Основные понятия
  2. Формулы четного коэффициента при х
  3. Теорема Виета
  4. Квадратные уравнения частного характера
  5. Теорема Виета для многочленов (уравнений) высших степеней
  6. Уравнения, сводимые к квадратным (биквадратные)
  7. Исследование биквадратных уравнений
  8. Формулы Кордано
  9. Симметричные уравнения третьей степени
  10. Возвратные уравнения

###### Схема Горнера

Заключение

Список используемой литературы

Приложение 1

Приложение 2

Приложение 3

Введение

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему. Действительно, уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее число задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники (транспорт, сельское хозяйство, промышленность, связь и т. д.).

В этом реферате хотелось бы отобразить формулы и способы решения различных уравнений. Для этого приводятся уравнения, которые не изучаются в школьной программе. В основном это уравнения частного характера и уравнения высших степеней. Чтобы раскрыть эту тему приводятся доказательства этих формул.

Задачи нашего реферата:

- улучшить навыки решения уравнений

- наработать новые способы решения уравнений

- выучить некоторые новые способы и формулы для решения этих уравнений.

Объект исследования - элементарная алгебра Предмет исследования уравнения. Выбор этой темы основывался на том, что уравнения есть как в программе начальной, так и в каждом последующем классе общеобразовательных школ, лицеев, колледжей. Многие геометрические задачи, задачи по физике, химии и биологии решаются с помощью уравнений. Уравнения решали двадцать пять веков назад. Они создаются и сегодня – как для использования в учебном процессе, так и для конкурсных экзаменов в вузы, для олимпиад самого высокого уровня.

Глава 1. История квадратных уравнений и уравнений высших порядков

**1.1 Уравнения в Древнем Вавилоне**

Алгебра возникла в связи с решением разнообразных задач при помощи уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведённых над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомых с помощью алгебраических действий над данными величинами. В алгебре изучается общие свойства действий над величинами.

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в Древнем Вавилоне. Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земельными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Как было сказано ранее, квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилонянами. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются как неполные, так и полные квадратные уравнения.

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современными, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решением, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.

Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствует понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратного уравнения.

**1.2 Уравнения арабов**

Некоторые способы решения уравнений как квадратных, так и уравнений высших степеней были выведены арабами. Так известный арабский математик Ал-Хорезми в своей книге «Ал - джабар» описал многие способы решения различных уравнений. Их особенность была в том, что Ал-Хорезми применял сложные радикалы для нахождения корней (решений) уравнений. Необходимость в решении таких уравнений была нужна в вопросах о разделе наследства.

**1.3 Уравнения в Индии**

Квадратные уравнения решали и в Индии. Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 году индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII век), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой конической форме:

aх² + bx = c, где a > 0

В этом уравнении коэффициенты, кроме а, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи ». Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Различные уравнения как квадратные, так и уравнения высших степеней решались нашими далекими предками. Эти уравнения решали в самых разных и отдаленных друг от друга странах. Потребность в уравнениях была велика. Уравнения применялись в строительстве, в военных делах, и в бытовых ситуациях.

**Глава 2. Квадратные уравнения и уравнения высших порядков**

**2.1 Основные понятия**

Квадратным уравнением называют уравнения вида

ax²+bx+c = 0,

где коэффициенты a, b, c – любые действительные числа, причём a ≠ 0.

Квадратное уравнение называют приведённым, если его старший коэффициент равен 1.

**Пример**:

x2 + 2x + 6 = 0.

Квадратное уравнение называют не приведенным, если старший коэффициент отличен от 1.

**Пример**:

2x2 + 8x + 3 = 0.

Полное квадратное уравнение - квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых, иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и c отличны от нуля.

**Пример**:

3x2 + 4x + 2 = 0.

Неполное квадратное уравнение – это квадратное уравнение, у которого хотя бы один коэффициент b, c равен нулю.

Таким образом, выделяют три вида неполных квадратных уравнений:

1. ax² = 0 (имеет два совпадающих корня x = 0).
2. ax² + bx = 0 (имеет два корня x1 = 0 и x2 = -)



**Пример**:

x2 + 5x = 0

x(x+5) =0

x1= 0, x2 = -5.

**Ответ**: x1=0, x2= -5.

1. ax² + c = 0

Если –<0 - уравнение не имеет корней.



**Пример**:

5x2 + 6 = 0

**Ответ**: уравнение не имеет корней.

Если –> 0, то x1,2 = ±



**Пример**:

2x2 – 6 = 0

х2=±



х1,2=±



**Ответ**: х1,2=±



Любое квадратное уравнение можно решить через дискриминант (b² - 4ac). Обычно выражение b² - 4ac обозначают буквой D и называют дискриминантом квадратного уравнение ax² +bx + c = 0 (или дискриминантом квадратного трёх члена ax² + bx + c)

**Пример**:

х2 +14x – 23 = 0

D = b2 – 4ac = 144 + 92 = 256

x1,2 =



x1 =



x2 =



**Ответ**: x1 = 1, x2 = - 15.

В зависимости от дискриминанта уравнение может иметь или не иметь решение.

1) Если D < 0, то не имеет решения.

2) Если D = 0, то уравнение имеет два совпадающих решения x1,2 =



3) Если D > 0, то имеет два решения, находящиеся по формуле:

x1,2 =



**2.2 Формулы четного коэффициента при х**

Мы привыкли к тому, что корни квадратного уравнения

ax² + bx + c = 0 находятся по формуле

x1,2 =



Но математики никогда не пройдут мимо возможности облегчить себе вычисления. Они обнаружили, что эту формулу можно упростить в случае, когда коэффициент b имеет вид b = 2k, в частности, если b есть четное число.

В самом деле, пусть у квадратного уравнения ax² + bx + c = 0 коэффициент b имеет вид b = 2k. Подставив в нашу формулу число 2k вместо b, получим:

x1,2=



=



Итак, корни квадратного уравнения ax² + 2kx + c = 0 можно вычислять по формуле:

x1,2=



**Пример**:

5х2 - 2х + 1 = 0



x1,2=



Преимущество этой формулы в том, что в квадрат возводится не число b, а его половина, вычитается из этого квадрата не 4ac, а просто ac и, наконец, в том, что в знаменателе содержится не 2a, а просто a.

В случае если квадратное уравнение приведенное, то наша формула будет выглядеть так:

x1,2=-k ±.



**Пример**:

х2 – 4х + 3 = 0

х1,2 = 2 ±



х1 = 3

х2 = 1

**Ответ**: х1 = 3, х2 = 1.

**2.3 Теорема Виета**

### Очень любопытное свойство корней квадратного уравнения обнаружил французский математик Франсуа Виет. Это свойство назвали теорема Виета:

### Чтобы числа x1 и x2 являлись корнями уравнения:

### ax² + bx + c = 0

необходимо и достаточно выполнения равенства

x1 + x2 = -b/a и x1x2 = c/a

Теорема Виета позволяет судить о знаках и абсолютной величине квадратного уравнения

А именно

x² + bx + c = 0

1. Если b>0, c>0 то оба корня отрицательны.
2. Если b<0, c>0 то оба корня положительны.
3. Если b>0, c<0 то уравнение имеет корни разных знаков, причём отрицательный корень по абсолютной величине больше положительного.
4. Если b<0, c<0 то уравнение имеет корни разных знаков, причём отрицательный корень по абсолютной величине меньше положительного.

**2.4 Квадратные уравнения частного характера**

1) Если a + b + c = 0 в уравнении ax² + bx + c = 0, то

х1=1, а х2 = .



**Доказательство**:

В уравнении ax² + bx + c = 0, его корни

x1,2 = (1).



Представим b из равенства a + b + c = 0

Подставим это выражение в формулу (1):

х1,2=



=



Если рассмотрим по отдельности два корня уравнения, получим:

1. х1=



1. х2=



Отсюда следует: х1=1, а х2 = .



1. **Пример**:

2х² - 3х + 1 = 0

a = 2, b = -3, c = 1.

a + b + c = 0, следовательно

х1 = 1

х2 = ½

2. **Пример**:

418х² - 1254х + 836 = 0

Этот пример очень тяжело решить через дискриминант, но, зная выше приведенную формулу его с легкостью можно решить.

a = 418, b = -1254, c = 836.

х1 = 1 х2 = 2

2) Если a - b + c = 0, в уравнении ax² + bx + c = 0, то:

х1=-1, а х2 =- .



**Доказательство**:

Рассмотрим уравнение ax² + bx + c = 0, из него следует, что:

x1,2 = (2).



Представим b из равенства a - b + c = 0

b = a + c, подставим в формулу (2):

x1,2=



=



Получаем два выражения:

1. х1=



1. х2=



Эта формула похожа на предыдущую, но она тоже важна, т.к. часто встречаются примеры такого типа.

1) **Пример**:

2х² + 3х + 1 = 0

a = 2, b = 3, c = 1.

a - b + c = 0, следовательно

х1 = -1

х2 = -1/2

2) **Пример**:



**Ответ**: x1 = -1; х2 = -



3) Метод “**переброски**”

Корни квадратных уравнений y² + by + аc = 0 и ax² + bx + c = 0 связанны соотношениями:

х1 = и х2 =



**Доказательство**:

а) Рассмотрим уравнение ax² + bx + c = 0

x1,2 = =



б) Рассмотрим уравнение y² + by + аc = 0

y1,2 =



Заметим, что дискриминанты у обоих решений равны, сравним корни этих двух уравнений. Они отличаются друг от друга на старший коэффициент, корни первого уравнения меньше корней второго на а. Используя теорему Виета и выше приведенное правило, нетрудно решать разнообразные уравнения.

**Пример**:

Имеем произвольное квадратное уравнение

10х² - 11х + 3 = 0

Преобразуем это уравнение по приведенному правилу

y² - 11y + 30 = 0

Получим приведенное квадратное уравнение, которое можно достаточно легко решить с помощью теоремы Виета.

Пусть y1 и y2 корни уравнения y² - 11y + 30 = 0

y1y2 = 30 y1 = 6

y1 + y2 = 11 y2 = 5

Зная, что корни этих уравнений отличны друг от друга на а, то

х1 = 6/10 = 0,6

х2 = 5/10 = 0,5

В некоторых случаях удобно решать сначала не данное уравнение ax² + bx + c = 0, а приведенное y² + by + аc = 0, которое получается из данного «переброской» коэффициента а, а затем разделить найденный корни на а для нахождения исходного уравнения.

2.5 Формула Виета для многочленов (уравнений) высших степеней

Формулы, выведенные Виетом для квадратных уравнений, верны и для многочленов высших степеней.

Пусть многочлен

P(x) = a0xn+ a1xn-1­­­ + … +an

Имеет n различных корней x1 , x2 …, xn.

В этом случае он имеет разложение на множители вида:

a0xn+ a1xn-1 +…+ an = a0( x – x1)( x – x2)…(x – xn)

Разделим обе части этого равенства на a0 ≠ 0 и раскроем в первой части скобки. Получим равенство:

xn+ ()xn-1+ … + () = xn – (x1 + x2 + … + xn) xn-1+ ( x1x2 + x2x3 + … + xn-1xn)xn-2+ … +(-1)n x1x2 … xn



Но два многочлена тождественно равны в том и только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны. Отсюда следует, что выполняется равенство

x1 + x2 + … + xn = -



x1x2 + x2x3 + … + xn-1xn =



x1x2 … xn = (-1)n



Например, для многочленов третей степени

a0x³ + a1x² + a2x + a3

# Имеем тождества

x1 + x2 + x3 = -



x1x2 + x1x3 + x2x3 =



x1x2x3 = -



Как и для квадратных уравнений, эту формулу называют формулами Виета. Левые части этих формул являются симметрическими многочленами от корней x1 , x2 …, xn данного уравнения, а правые части выражаются через коэффициент многочлена.

**2.6 Уравнения, сводимые к квадратным (биквадратные)**

К квадратным уравнениям сводятся уравнения четвертой степени:

ax4 + bx2 + c = 0,

называемые биквадратными, причем, а ≠ 0.

Достаточно положить в этом уравнении х2 = y, следовательно,

ay² + by + c = 0

найдём корни полученного квадратного уравнения

y1,2 =



Чтобы найти сразу корни х1,x2,x3,x4 , заменим y на x и получим

x² =



х1,2,3,4 = .



Если уравнение четвёртой степени имеет х1, то имеет и корень х2 = -х1,

Если имеет х3, то х4 = - х3. Сумма корней такого уравнения равна нулю.

**Пример**:

2х4- 9x² + 4 = 0

# Подставим уравнение в формулу корней биквадратных уравнений:

х1,2,3,4 = ,



зная, что х1 = -х2, а х3 = -х4, то:

х1,2 =



х3,4 =



**Ответ**: х1,2 = ±2; х1,2 =



**2.7 Исследование биквадратных уравнений**

Возьмем биквадратное уравнение

ax4 + bx2 + c = 0,

где a, b, c –действительные числа, причем а > 0. Введя вспомогательную неизвестную y = x², исследуем корни данного уравнения, и результаты занесем в таблицу (см. приложение №1)

**2.8 Формула Кардано**

Если воспользоваться современной символикой, то вывод формулы Кардано может иметь такой вид:

х =



Эта формула определяет корни общего уравнения третей степени:

ax3 + 3bx2 + 3cx + d = 0.

Эта формула очень громоздкая и сложная (она содержит несколько сложныных радикалов). Она не всегда примениться, т.к. очень сложна для заполнения.

**2.9 Симметричные уравнения третей степени**

Симметричными уравнениями третей степени называют уравнения вида

ax³ + bx² +bx + a = 0 (**1**)

или

ax³ + bx² - bx – a = 0 (**2**)

где a и b – заданные числа, причём a ≠ 0.

Покажем, как решаются уравнение (**1**).

Имеем:

ax³ + bx² + bx + a = a(x³ + 1) + bx(x + 1) = a(x + 1) (x² - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1) (ax² +(b – a)x + a).

Получаем, что уравнение (**1**) равносильно уравнению

(x + 1) (ax² +(b – a)x + a) = 0.

Значит его корнями, будут корни уравнения

ax² +(b – a)x + a = 0

и число x = -1

аналогично решается уравнение (**2**)

ax³ + bx² - bx - a = a(x³ - 1) + bx(x - 1) = a(x - 1) (x² + x + 1) + bx(x - 1) = (x - 1) ( ax2 + ax + a + bx ) = (x - 1) (ax² +(b + a)x + a).

1) **Пример**:

2x³ + 3x² - 3x – 2 = 0

Ясно, что x1 = 1, а

х2 и х3 корни уравнения 2x² + 5x + 2 = 0 ,

Найдем их через дискриминант:

x1,2 =



x2 = -, x3 = -2



2) **Пример**:

5х³ + 21х² + 21х + 5 = 0

Ясно, что x1 = -1, а

х2 и х3 корни уравнения 5x² + 26x + 5 = 0 ,

Найдем их через дискриминант:

x1,2 =



x2 = -5, x3 = -0,2.

**2.10 Возвратные уравнения**

Возвратное уравнение – алгебраическое уравнение

а0хn + a1xn – 1 + … + an – 1x + an =0,

в котором ак = an – k, где k = 0, 1, 2 …n, причем, а ≠ 0.

Задачу нахождения корней возвратного уравнения сводят к задаче нахождения решений алгебраического уравнения меньшей степени. Термин возвратные уравнения был введён Л. Эйлером.

Уравнение четвёртой степени вида:

ax4 + bx3 + cx2 + bmx + am² = 0, (a ≠ 0).

Приведя это уравнение к виду

a (x² + m²/x²) + b(x + m/x) + c = 0, и y = x + m/x и y² - 2m = x² + m²/x²,

откуда уравнение приводится к квадратному

ay² + by + (c-2am) = 0.

Пример:

3х4 + 5х3 – 14х2 – 10х + 12 = 0

Разделив его на х2, получим эквивалентное уравнение

3х2 + 5х – 14 – 5 × , или



Где и



3(y2 - 4) + 5y – 14 = 0, откуда

y1 = y2 = -2, следовательно



и , откуда



х1,2 =



х3,4 =



Ответ: х1,2 = х3,4 = .



Частным случаем возвратных уравнений являются симметричные уравнения. О симметричных уравнениях третей степени мы говорили ранее, но существуют симметричные уравнения четвертой степени.

Симметричные уравнения четвертой степени.

1. Если m = 1, то это симметричное уравнение первого рода, имеющее вид

ax4 + bx3 + cx2 + bx + a = 0 и решающееся новой подстановкой

y =



2) Если m = -1, то это симметричное уравнение второго рода, имеющее вид

ax4 + bx3 + cx2 - bx + a = 0 и решающееся новой подстановкой

y =



**2.11 Схема Горнера**

Для деления многочленов применяется правило “деления углом”, или схема Горнера***.*** С этой целью располагают многочлены по убывающим степеням *х* и находят старший член частного Q(x) из условия, что при умножении его на старший член делителя D(x) получается старший член делимого P(x). Найденный член частного умножают, затем на делитель и вычитают из делимого. Старший член частного определяют из условия, что он при умножении на старший член делителя даёт старший член многочлена разности и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока степень разности не окажется меньше степени делителя.(см. приложение №2).

В случае уравнений R = 0 этот алгоритм заменяется схемой Горнера.

**Пример**:

х3 + 4х2 + х – 6 = 0

Находим делители свободного члена ±1; ± 2; ± 3; ± 6.

Левую часть уравнения обозначим f(x). Очевидно, что f(1) = 0, x1 = 1. Делим f(x) на х – 1. (см. приложение №3)

Значит,

х3 + 4х2 + х – 6 = (х – 1) (х2 + 5х + 6)

Последний множитель обозначим через Q(x). Решаем уравнение Q(x) = 0.

х2,3 =



**Ответ**: 1; -2; -3.

##### В этой главе мы привели некоторые формулы решения различных уравнений. Большинство этих формул решения уравнений частного характера. Эти свойства очень удобны так, как гораздо легче решать уравнения по отдельной формуле для этого уравнения, а не по общему принципу. К каждому из способов мы привели доказательство и несколько примеров.

**Заключение**

В первой главе была рассмотрена история возникновения квадратных уравнений и уравнений высших порядков. Различные уравнения решали более 25 веков назад. Множество способов решения таких уравнений были созданы в Вавилоне, Индии. Потребность в уравнениях была и будет.

Во второй главе приведены различные способы решения (нахождения корней) квадратных уравнений и уравнений высших порядков. В основном это способы решения для уравнений частного характера, то есть к каждой группе уравнений, объединенных какими- либо общими свойствами или видом, приведено особое правило, которое применяется только для этой группы уравнений. Этот способ (подбора к каждому уравнению собственной формулы) гораздо легче, чем нахождение корней через дискриминант.

В этом реферате достигнуты все цели и выполнены основные задачи, доказаны и разучены новые, ранее неизвестные формулы. Мы проработали много вариантов примеров перед тем, как занести их в реферат, по этому мы уже представляем, как решать некоторые уравнения. Каждое решение пригодится нам в дальнейшей учебе. Этот реферат помог классифицировать старые знания и познать новые.

**Список литературы**

1. Виленкин Н.Я. “Алгебра для 8 класса”, М., 1995.
2. Галицкий М.Л. “Сборник задач по алгебре”, М. 2002.
3. Даан-Дальмедико Д. “Пути и лабиринты”, М., 1986.
4. Звавич Л.И. “Алгебра 8 класс”, М., 2002.
5. Кушнир И.А. “Уравнения”, Киев 1996.
6. Савин Ю.П. “Энциклопедический словарь юного математика”, М., 1985.
7. Мордкович А.Г. “Алгебра 8 класс”, М., 2003.
8. Худобин А.И. “Сборник задач по алгебре”, М., 1973.
9. Шарыгин И.Ф. “Факультативный курс по алгебре”, М., 1989.

**Приложение 1**

Исследование биквадратных уравнений

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| C | b | | Выводы | |
| О корнях вспомогательного уравнения ay² +by+c=0 | О корнях данного уравнения a(x²)² +bx² +c=0 |
| C < 0 | b- любое действительное число | | y < 0 ; y > 01 2 | x = ±√y 1,2 2 |
| C > 0 | b<0 | D > 0 | y > 0  1,2 | x = ±√y 1,2,3,4 1,2 |
| D = 0 | y > 0 | x = ±√y 1,2 . |
| D < 0 | Нет корней | Нет корней |
| b ≥ 0 | | y < 0  1,2 | Нет корней |
| Нет корней | Нет корней |
| y > 0 ; y < 01 2 | x = ±√y 1,2 1 |
| C = 0 | b > 0 | | y = 0 | x = 0 |
| b = 0 | | y = 0 | x = 0 |
| b < 0 | | y = 0 | x = 0 |

**Приложение 2**

Деление многочлена на многочлен «уголком»

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A0 | a1 | a2 | ... | an | c |
| **+** |  |  |  |  |  |  |
|  |  | b0c | b1c | … | bn-1c |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | B0 | b1 | b2 | … | bn | = R (остаток) |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Приложение 3**

Схема Горнера

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | Корень |
|  | 1 | 4 | 1 | -6 | 1 |
|  |  |  |  |  | х1 = 1 |
| сносим |  | 5 | 6 | 0 |  |
|  | 1 | 1×1 +4 = 5 | 5×1 + 1 = 6 | 6×1 – 6 = 0 |  |
|  |  | корень |  |  |  |
|  |  | х1 = 1 |  |  |  |